ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. А. ЦУПАК, А. Н. ЦУПАК

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ

II семестр

- ПОЛИНОМЫ
- ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ
- ЛИНЕЙНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ
- λ- МАТРИЦЫ
- ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК

ПЕНЗА ИИЦ ПГУ 2009

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. А. ЦУПАК, А. Н. ЦУПАК

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ

II семестр

- ПОЛИНОМЫ
- ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ
- ЛИНЕЙНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ
- λ- МАТРИЦЫ
- ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК

Учебное пособие

ПЕНЗА ИИЦ ПГУ 2009

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143
Ц 86

Рецензенты:

доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук,
заведующий кафедрой математики Пензенской государственной
технологической академии
С. Н. Дорофеев;

кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой
естественнонаучных дисциплин
Российского государственного университета
инновационных технологий и предпринимательства
С. Я. Нагаева

Цупак, А. А.
Ц 86 **Лекции по алгебре. II семестр. Полиномы. Ортогональные матрицы. Линейные и эрмитовы формы. λ- матрицы. Группы подстановок** : учебное пособие / А. А. Цупак, А. Н. Цупак. — Пенза : Издательский центр ПензГУ, 2009. — 152 с.

ISBN 978-5-94170-250-3

В книге представлен текст лекций по второй части курса «Алгебра», читаемого студентам-первокурсникам естественнонаучного факультета Пензенского государственного университета.

Вторая часть курса охватывает темы: «Полиномы», «Симметрические и эрмитовы матрицы», «Ортогональные матрицы», «Линейные и квадратичные формы», «Эрмитовы формы», « λ - матрицы», «Группы подстановок».

Книга может быть полезна всем студентам естественнонаучного факультета, изучающим Математику.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143

ISBN 978-5-94170-250-3

Содержание

Предисловие

Открытая читателем книжечка является конспектом лекций по второй части курса «Алгебра», читаемого студентам первого курса естественно-научного факультета Пензенского государственного университета.

Слушатели курса — это студенты второго семестра, которые

- уже владеют знаниями по дисциплинам первого семестра;
- еще недостаточно привыкли к восприятию очень абстрактных математических теорий и лаконичных математических текстов;
- должны постепенно привыкать к более абстрактной и лаконичной подаче математического материала;
- не должны болезненно переносить переход от школьной и первосеместровой Математики к математической Науке.

Перечисленными тезисами и руководствовались авторы, составляя вторую часть лекций по алгебре для первокурсников, читая эти лекции, проводя практические занятия, экзаменуя студентов-математиков в первую и вторую для них сессии.

Содержание второй части курса отражено в достаточно подробном оглавлении.

Оглавление является еще и программой экзамена.

Темы курса занумерованы арабскими цифрами без внутренних точек; экзаменационные вопросы занумерованы арабскими цифрами с одной внутренней точкой; мелкая рубрикация (арабские цифры с двумя внутренними точками) служит для более убедительного структурирования излагаемого материала и для ориентации экзаменующихся при подготовке ответов на экзаменационные вопросы.

Тема «Эрмитовы формы» изучается студентами самостоятельно с опорой на аналогичную тему «Квадратичные формы», обсуждается на семинарских (практических) занятиях и закрепляется решением задач.

Работа над текстом была распределена между авторами и выполнена ими поровну: А. Н. Цупак — темы 1–3, А. А. Цупак — темы 4–8.

Оба автора в равной мере несут ответственность перед читателями за всю работу в целом, в том числе за все методические промахи, невольные ошибки и незамеченные опечатки.

И вновь мы с благодарностью вспоминаем тех, которые указали нам Путь, и тех, кого мы встретили на этом Пути.

1 Алгебра полиномов

1.1 Полиномы над числовым полем $\mathbb{F}$

1.1.1 Определение полинома; степень полинома

Пусть $\mathbb{F}$ — это числовое поле $(\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C})$. Числовые поля являются бесконечными полями, и для них

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ слагаемых}} = 0 \text{ только при } n = 0\,,$$

т.е. **характеристика числового поля равна нулю**.

Полином (многочлен) над полем $\mathbb{F}$ задается и определяется выражением

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, причем $a_n \neq 0$.

Натуральное число n называется степенью полинома, которая обозначается символом $\deg f$ или $\deg f(\lambda)$. Например,

$$\begin{array}{lcll}
\deg(4 - 7\lambda + 2\lambda^2 - 5\lambda^3) & = & 3, & \\
\deg(a_0 + a_1\lambda + \lambda^2) & = & 2, & \\
\deg(a_0 + \lambda) & = & 1, & \\
\deg(a_0) & = & 0 & \text{при } a_0 \neq 0, \\
\deg(0) & = & \infty & (\text{иногда } +\infty, \text{ иногда } -\infty).
\end{array}$$

Множество полиномов над полем $\mathbb{F}$ в нашем курсе лекций будем обозначать $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Если $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2$ ($\mathbb{F}_1$ есть подполе поля $\mathbb{F}_2$), то

$$\mathcal{P}(\mathbb{F}_1) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{F}_2);$$

например, каждый полином с рациональными коэффициентами является полиномом с вещественными коэффициентами и является полиномом с комплексными коэффициентами.

Кроме того,

$$\mathbb{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{F}),$$

т.е. каждый элемент поля можно отождествить с полиномом (мономом) нулевой или бесконечной степени.

1.1.2 Действия над полиномами

Соответствующие определения хорошо известны из школьного курса математики. Для определенности мы кратко напомним свойства действий.

Сложение полиномов, обозначаемое

$$f_1 + f_2\,,$$

ассоциативно, коммутативно; существует нейтральный по сложению элемент (нулевой полином), для каждого полинома существует противоположный.

Умножение полиномов, обозначаемое

$$f_1 \cdot f_2\,,$$

ассоциативно, коммутативно; существует нейтральный по умножению элемент (полином нулевой степени, тождественно равный 1).

Вывод. $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ имеет структуру коммутативного кольца с единицей.

1.1.3 Степени полиномов при сложении и умножении

Для степеней **ненулевых полиномов** имеет место сравнение

$$\deg(f_1 + f_2) \leq \max\{\deg f_1, \deg f_2\}$$

и равенство

$$\deg(f_1 \cdot f_2) = \deg f_1 + \deg f_2.$$

При $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$

$$\deg(\alpha f) = \deg f.$$

Если $\deg f_2 < \deg f_1$, то $\deg(f_1 + f_2) = \deg f_1$.

1.1.4 Критерий обратимости полинома

Полином $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ обратим тогда и только тогда, когда он имеет нулевую степень (является ненулевой константой из $\mathbb{F}$).

Действительно, если $f \cdot f^{-1} = 1$, то $\deg f + \deg f^{-1} = 0$, следовательно, $\deg f = \deg f^{-1} = 0$, т.е. $f \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, — ненулевое число.

1.1.5 Деление с остатком в кольце $\mathbb{Z}$

Мы знаем, что в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ имеет место деление с остатком:

$$\forall a \quad \forall b > 0 \quad \exists! q \quad \exists! r : 0 \leq r < b \qquad a = qb + r\,,$$

где q — (неполное) частное, r — остаток.

Примеры.

$$51 = 10 \cdot 5 + 1, \qquad -51 = (-11) \cdot 5 + 4.$$

1.1.6 Деление с остатком в кольце $\mathcal{P}(\mathbb{F})$

Теорема. Пусть $f_1, f_2, r, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ — полиномы, тогда

$$\forall f_1 \forall f_2 : \deg f_2 \geq 0 \quad \exists! q \exists! r : \deg r < \deg f_2 \qquad f_1(\lambda) = q(\lambda) \cdot f_2(\lambda) + r(\lambda),$$

где $q(\lambda)$ — (неполное) частное, $r(\lambda)$ — остаток.

Пример. $4\lambda^6 + 3\lambda^5 + \lambda^4 - 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 7\lambda - 1 =$
$= (4\lambda^4 - 5\lambda^3 + 15\lambda^2 - 39\lambda - 95) \cdot \underbrace{(\lambda^2 + 2\lambda - 1)}_{\deg=2} + \underbrace{(158\lambda - 96)}_{\deg=1}$.

Доказательство существования разложения. Пусть

$$f_1(\lambda) = a_n\lambda^n + \ \ldots + a_1\lambda + a_0, \quad a_n \neq 0, \ \deg f_1 = n,$$

$$f_2(\lambda) = b_m\lambda^m + \ \ldots + b_1\lambda + b_0, \quad b_m \neq 0, \ \deg f_2 = m.$$

<u>Если</u> $\deg f_2 = m > n = \deg f_1$, <u>то</u> $f_1(\lambda) = 0 \cdot f_2(\lambda) + f_1(\lambda)$; доказательство завершено.

Рассматриваем случай $n \geq m$ $(n - m = k \geq 0)$. Положим

$$r_1(\lambda) = f_1(\lambda) - \frac{a_n}{b_m} f_2(\lambda)\lambda^{n-m} = \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m} b_{m-1}\right)\lambda^{n-1} + \ \ldots$$

$$\deg r_1 \leq n - 1 < n\,.$$

Не исключено, что $\deg r_1 = -\infty \quad (r_1 \equiv 0)$.

Теперь можно записать:

$$f_1(\lambda) = \underbrace{\left(\frac{a_n}{b_m}\right)}_{c_k \neq 0} \cdot f_2(\lambda) \cdot \lambda^{n-m} + r_1(\lambda).$$

<u>Если</u> $\deg r_1(\lambda) < \deg f_2(\lambda)$,
<u>то</u> алгоритм завершен (а предложение доказано),
<u>иначе</u>

$$r_1(\lambda) = c_{k_1}\lambda^{k_1} \cdot f_2(\lambda) + r_2(\lambda),$$

$$k_1 < k, \qquad \deg r_2 \leq \deg r_1 - 1 < \deg r_1\,.$$

Если $\deg r_2(\lambda) < \deg f_2(\lambda)$,
то алгоритм завершен (а предложение доказано),
иначе ... и т.д.

На некотором шаге станет $\deg r_s < \deg f_2$

$$f_1(\lambda) = (c_k\lambda^k + c_{k_1}\lambda^{k_1} + \ \dots \ + c_0) \cdot f_2(\lambda) + \underbrace{r(\lambda)}_{r_s(\lambda)}.$$

Существование доказано.

Доказательство единственности разложения. Пусть
$f_1(\lambda) = q(\lambda)f_2(\lambda) + r(\lambda), \qquad \deg r(\lambda) < \deg(f_2),$
$f_1(\lambda) = \tilde{q}(\lambda)f_2(\lambda) + \tilde{r}(\lambda), \qquad \deg \tilde{r}(\lambda) < \deg(f_2),$
тогда $[q(\lambda) - \tilde{q}(\lambda)] \cdot f_2(\lambda) + (r(\lambda) - \tilde{r}(\lambda)) = 0 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ и, следовательно, $(r(\lambda) - \tilde{r}(\lambda)) = [\tilde{q}(\lambda) - q(\lambda)] \cdot f_2(\lambda)$;
но $\deg(r(\lambda) - \tilde{r}(\lambda)) < \deg f_2(\lambda)$, поэтому $[\tilde{q}(\lambda) - q(\lambda)] \equiv 0$, $\tilde{q} = q$. Но тогда и $r = \tilde{r}$. Единственность доказана.

Пример. Для полиномов

$$f_1(\lambda) = 7\lambda^5 + 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 2\lambda^2 + 0\lambda + 1,$$

$$f_2(\lambda) = 2\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

осуществить алгоритм деления с остатком.

Решение.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
7\lambda^5 & +3\lambda^4 & +4\lambda^3 & -2\lambda^2 & +0\lambda & & +1 & \;2\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ \cline{8-8}
7\lambda^5 & +3.5\lambda^4 & -14\lambda^3 & +10.5\lambda^2 & & & & 3.5\lambda^2 - 0.25\lambda + 9.125 \\ \cline{1-4}
 & -0.5\lambda^4 & +18\lambda^3 & -12.5\lambda^2 & +0\lambda & & +1 & \\
 & -0.5\lambda^4 & -0.25\lambda^3 & +1\lambda^2 & -0.75\lambda & & & \\ \cline{2-5}
 & & 18.25\lambda^3 & -13.5\lambda^2 & +0.75\lambda & & +1 & \\
 & & 18.25\lambda^3 & +9.125\lambda^2 & -36.5\lambda & & +27.375 & \\ \cline{3-7}
 & & & -22.625\lambda^2 & +37.25\lambda & & -26.375 &
\end{array}$$

Ответ. $(7\lambda^5 + 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 2\lambda^2 + 0\lambda + 1) =$

$$= \underbrace{(\ 3.5\lambda^2 - 0.25\lambda + 9.125)}_{\text{(неполное) частное}} \cdot \underbrace{(2\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 3)}_{\text{делитель}} +$$

$$+ \underbrace{(-22.625\lambda^2 + 37.25\lambda - \ 26.375)}_{\text{остаток}}.$$

Следствие. Если делитель — это бином первой степени $(c_0 + c_1\lambda)$, то остаток — это число (полином нулевой или бесконечной степени).

Пример. Разделить полином на бином.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3\lambda^3 & +4\lambda^2 & +2\lambda & -1 & 2\lambda+4 \\ \cline{5-5}
\underline{3\lambda^3} & \underline{+6\lambda^2} & & & 1.5\lambda^2 - 1\lambda + 3 \\
& -2\lambda^2 & +2\lambda & -1 & \\
& \underline{-2\lambda^2} & \underline{-4\lambda} & & \\
& & 6\lambda & -1 & \\
& & \underline{6\lambda} & \underline{+12} & \\
& & & -13 &
\end{array}
$$

Ответ. $$(3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda - 1) = \underbrace{(1.5\lambda^2 - \lambda + 3)}_{\text{(неполное) частное}} \cdot (2\lambda + 4) + \underbrace{(-13)}_{\text{остаток}}.$$

1.2 Приводимость и делимость

1.2.1 Приводимость–неприводимость

Делитель над $\mathbb{F}$ полинома $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ — это такой полином $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, что для некоторого $\psi \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$

$$f = \varphi \cdot \psi.$$

Говорят еще: f делится на φ, или еще так: φ делит f.

Определение приводимости. Полином $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ называется полиномом, приводимым над полем $\mathbb{F}$, если

$$\begin{cases} f = \varphi \cdot \psi, \\ \varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), \\ \deg \varphi > 0, \\ \deg \psi > 0. \end{cases}$$

Определение неприводимости. Ненулевой полином $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ называется полиномом, неприводимым над полем $\mathbb{F}$, если

$$\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \qquad (f = \varphi \cdot \psi) \Longrightarrow (\deg \varphi = 0 \vee \deg \psi = 0).$$

Приводимость–неприводимость — понятие относительное:

- Полином $\lambda^2-4 \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ приводим над полем $\mathbb{Q}$ и над всяким более широким полем:
$$(\lambda^2-4)=(\lambda-2)(\lambda+2).$$
- Полином $\lambda^2-2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$, но приводим над полем $\mathbb{R}$ (и даже над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$):
$$(\lambda^2-2)=(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2}).$$
- Полином $\lambda^2+4 \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$, неприводим над полем $\mathbb{R}$, но приводим над полем $\mathbb{C}$ (и даже над полем $\mathbb{Q}(i)$):
$$(\lambda^2+4)=(\lambda-i2)(\lambda+i2).$$

Понятно, что если f приводим над полем $\mathbb{F}$, то он приводим и над более широким полем $\mathbb{F}_1 \supset \mathbb{F}$.

1.2.2 Делимость

В этом пункте временно вводится знак отношения делимости « $\div$ ».
Запись $f \div g$ читается так: f делится на g,
или так: g делит f.

Свойства отношения делимости. (Доказательства оставлены для самостоятельной работы студентов.)

1. $\left\{\begin{array}{l} f \div g \\ \quad g \div h \end{array}\right. \Longrightarrow f \div h$.
2. $\left\{\begin{array}{l} f \div h \\ g \div h \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (f+g) \div h \\ (f-g) \div h \end{array}\right.$.
3. $f \div h \Longrightarrow \psi f \div h$.
4. $\left\{\begin{array}{l} f_1 \div h \\ f_2 \div h \\ \cdots\cdots \\ f_k \div h \end{array}\right. \Longrightarrow (f_1\psi_1+f_2\psi_2+\ \ldots\ +f_k\psi_k) \div h$.
5. $\deg h=0 \Longrightarrow f \div h$.
6. $f \div h \Longrightarrow f \div ch$ для любого $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.
7. $f \div g \;\&\; \deg f=\deg g \Longrightarrow f=cg$ для некоторого $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.
8. $\left\{\begin{array}{l} f \div g \\ g \div f \end{array}\right. \quad f=cg$ для некоторого $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

1.2.3 Наибольший общий делитель (НОД)

Определение. Пусть $\deg f, \deg g \neq \infty$. Наибольший общий делитель полиномов f, g — это полином $\nu = \text{НОД}(f, g)$, который является делителем и для f, и для g и который делится на любой другой общий делитель полиномов f, g; формально:

$$\nu = \text{НОД}(f,g) \quad \text{эквивалентно} \quad \left\{ \begin{array}{l} f \div \nu \\ g \div \nu \\ \left\{ \begin{array}{l} f \div h \\ g \div h \end{array} \right. \Rightarrow \nu \div h. \end{array} \right. .$$

НОД определен не однозначно, а с точностью до постоянного ненулевого множителя. Такую неопределенность можно устранить, полагая в НОД коэффициент при старшей степени λ равным 1.

1.3 Алгоритм Евклида

1.3.1 Алгоритм Евклида в кольце $\mathbb{Z}$

Алгоритм Евклида ($E\upsilon\varkappa\lambda\varepsilon\iota\delta\eta\varsigma$, 3 в. до хр. э.) в кольце $\mathbb{Z}$ — это алгоритм нахождения НОД двух положительных целых чисел с помощью операции деления с остатком. Вспомним его.

Если $a = b$, то $\text{НОД}(a, a) = a$.

Если $a > b$, то

$$\begin{array}{rcll} a & = & q_1 \cdot b + r_1 & r_1 < b \\ b & = & q_2 \cdot r_1 + r_2 & r_2 < r_1 \\ r_1 & = & q_3 \cdot r_2 + r_3 & r_3 < r_2 \\ r_2 & = & q_4 \cdot r_3 + r_4 & r_4 < r_3 \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{k-1} & = & q_{k+1} r_k + \underbrace{r_{k+1}}_{\text{НОД}} & r_{k+1} < r_k \\ r_k & = & q_{k+2} \cdot r_{k+1} \,. & \end{array}$$

В последней строке алгоритма остаток от деления не записан, т.к. он равен нулю. Это неизбежно, т.к. на каждом шаге алгоритма неотрицательный целый остаток становится все меньше и меньше.

Можно утверждать, что последний ненулевой остаток алгоритма Евклида и есть $\text{НОД}(a, b)$.

Действительно, просматривая строки алгоритма снизу вверх, видим, что

$$\begin{array}{rcl} r_k & \div & r_{k+1} \\ r_{k-1} & \div & r_{k+1} \\ \dots & & \dots \\ r_3 & \div & r_{k+1} \\ r_2 & \div & r_{k+1} \\ r_1 & \div & r_{k+1} \\ b & \div & r_{k+1} \\ a & \div & r_{k+1}\,, \end{array} \quad \text{т.е. } r_{k+1} \text{ — общий делитель для } a, b.$$

Просматривая строки алгоритма сверху вниз, понимаем, что

<u>если</u> $\left\{ \begin{array}{l} a \div s \\ b \div s \end{array} \right.$, <u>то</u>

$$\begin{array}{rcl} r_1 & \div & s \\ r_2 & \div & s \\ \dots & & \dots \\ r_k & \div & s \\ r_{k+1} & \div & s, \end{array} \quad \text{т.е. } r_{k+1} = \text{НОД}(a,b).$$

Пример. Найти НОД натуральных чисел 455 и 429.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 455 & 429 \\ \cline{2-2} \underline{429} & 1 \\ 26 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 429 & 26 \\ \cline{2-2} \underline{26\ \ } & 16 \\ \underline{169} & \\ \underline{156} & \\ 13 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 13 \\ \cline{2-2} \underline{26} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Ответ. $\text{НОД}(455, 429) = 13$; $455 = 13 \cdot 35$, $429 = 13 \cdot 33$.

1.3.2 Алгоритм Евклида в кольце $\mathcal{P}(\mathbb{F})$

Алгоритм Евклида в кольце $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ — это алгоритм нахождения НОД двух полиномов $a(\lambda), b(\lambda)$ с помощью операции деления с остатком. Опишем этот алгоритм.

При записи алгоритма неполные частные будем обозначать буквой q с индексами, помещая частное перед делителем; остатки от делений будем обозначать буквами r с индексами, согласуя их с индексами неполных частных.

Пусть $\deg a(\lambda) \geq \deg b(\lambda)$:

$$\begin{array}{rcll}
a(\lambda) & = & q_1(\lambda) \cdot b(\lambda) + r_1(\lambda) & \qquad \deg r_1(\lambda) < \deg b(\lambda) \\
b(\lambda) & = & q_2(\lambda) \cdot r_1(\lambda) + r_2(\lambda) & \qquad \deg r_2(\lambda) < \deg r_1(\lambda) \\
r_1(\lambda) & = & q_3(\lambda) \cdot r_2(\lambda) + r_3(\lambda) & \qquad \deg r_3(\lambda) < \deg r_2(\lambda) \\
r_2(\lambda) & = & q_4(\lambda) \cdot r_3(\lambda) + r_4(\lambda) & \qquad \deg r_4(\lambda) < \deg r_3(\lambda) \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{k-1}(\lambda) & = & q_{k+1}(\lambda) \cdot r_k + \underbrace{r_{k+1}(\lambda)}_{\text{НОД}} & \qquad \deg r_{k+1}(\lambda) < \deg r_k(\lambda) \\
r_k(\lambda) & = & q_{k+2}(\lambda) \cdot r_{k+1}(\lambda) &
\end{array}$$

В последней строке алгоритма остаток от деления не записан, т.к. он равен нулю. Это неизбежно, т.к. на каждом шаге алгоритма неотрицательная целая степень остатка становится все меньше и меньше.

Можно утверждать, что последний ненулевой остаток алгоритма Евклида и есть $\text{НОД}(a(\lambda), b(\lambda))$. Действительно, просматривая строки алгоритма снизу вверх, легко видеть, что

$$\begin{array}{rcl}
r_k(\lambda) & \div & r_{k+1}(\lambda) \\
r_{k-1}(\lambda) & \div & r_{k+1}(\lambda) \\
\ldots & & \ldots \\
r_3(\lambda) & \div & r_{k+1}(\lambda) \\
r_2(\lambda) & \div & r_{k+1}(\lambda) \\
r_1(\lambda) & \div & r_{k+1}(\lambda) \\
b(\lambda) & \div & r_{k+1}(\lambda) \\
a(\lambda) & \div & r_{k+1}(\lambda), \qquad \text{т.е. } r_{k+1}(\lambda) \text{ — общий делитель для } a(\lambda), b(\lambda).
\end{array}$$

Просматривая строки алгоритма сверху вниз, понимаем, что
<u>если</u> $\left\{ \begin{array}{l} a(\lambda) \div s(\lambda) \\ b(\lambda) \div s(\lambda) \end{array} \right.$, <u>то</u>

$$\begin{array}{rcl}
r_1(\lambda) & \div & s(\lambda) \\
r_2(\lambda) & \div & s(\lambda) \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\
r_k(\lambda) & \div & s(\lambda) \\
r_{k+1}(\lambda) & \div & s(\lambda), \qquad \text{т.е. } r_{k+1}(\lambda) = \text{НОД}(a(\lambda), b(\lambda)).
\end{array}$$

Замечание. Понятно, что найденный НОД, как и любой из промежуточных остатков, можно умножить на любое ненулевое число $c_k \in \mathbb{F}$.

Этим замечанием мы будем постоянно пользоваться при ручном решении практических задач.

Пример. Найти НОД полиномов

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lambda^4 + 2\lambda^3 - 13\lambda^2 + 4\lambda - 30, \\ b(\lambda) &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 6. \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\lambda^4 & +2\lambda^3 & -13\lambda^2 & +4\lambda & -30 & \lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 6 \\ \cline{6-6}
\lambda^4 & -3\lambda^3 & -2\lambda^2 & +6\lambda & & \lambda + 5 \\ \cline{1-4}
 & 5\lambda^3 & -11\lambda^2 & -2\lambda & -30 & \\
 & 5\lambda^3 & -15\lambda^2 & -10\lambda & +30 & \\ \cline{2-5}
 & & 4\lambda^2 & +8\lambda & -60 & \\
 & :4 & \lambda^2 & +2\lambda & -15 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\lambda^3 & -3\lambda^2 & -2\lambda & +6 & \lambda^2 + 2\lambda - 15 \\ \cline{5-5}
\lambda^3 & +2\lambda^2 & -15\lambda & & \lambda - 5 \\ \cline{1-3}
 & -5\lambda^2 & +13\lambda & +6 & \\
 & -5\lambda^2 & -10\lambda & +75 & \\ \cline{2-4}
 & & 23\lambda & -69 & \\
 & :23 & \lambda & -3 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrr|l}
\lambda^2 & +2\lambda & -15 & \lambda - 3 \\ \cline{4-4}
\lambda^2 & -3\lambda & & \lambda + 5 \\ \cline{1-2}
 & 5\lambda & -15 & \\
 & 5\lambda & -15 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Ответ. $\text{НОД}(a(\lambda), b(\lambda)) = (\lambda - 3)$.

1.3.3 Представление НОД двух полиномов над полем $\mathbb{F}$

Теорема. Если $d(\lambda) = \text{НОД}(a(\lambda), b(\lambda))$ для $a(\lambda), b(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, то существуют $u(\lambda), v(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, такие, что

$$d(\lambda) = a(\lambda) \cdot u(\lambda) + b(\lambda) \cdot v(\lambda),$$

а в предположении $\deg a(\lambda), \deg b(\lambda) > 0$, кроме того, еще и

$$\begin{cases} \deg u(\lambda) < \deg b(\lambda) \\ \deg v(\lambda) < \deg a(\lambda). \end{cases}$$

Доказательство. Рассматриваем последовательность равенств алгоритма Евклида снизу вверх, начиная с предпоследней строки. Из этой предпоследней строки следует, что

$$d(\lambda) = 1 \cdot r_{k-1}(\lambda) - q_{k+1}(\lambda) \cdot r_k(\lambda),$$

т.е. НОД есть комбинация остатков $r_{k-1}(\lambda), r_k(\lambda)$.

Но каждая строка алгоритма (читаемая справа налево) гласит, что каждый остаток есть комбинация остатков с меньшими номерами и что $r_2(\lambda)$ есть комбинация $r_1(\lambda), b(\lambda)$, а $r_1(\lambda)$ есть комбинация $a(\lambda), b(\lambda)$. В конечном итоге получается, что $d(\lambda)$ есть комбинация $a(\lambda), b(\lambda)$, а это, по сути, и утверждает первая часть теоремы.

Для доказательства второй части теоремы предположим противное: $\deg b(\lambda) \leq \deg u(\lambda)$. (Далее идет доказательство не от противного, а конструктивное выделение требуемого множителя.) Проведем деление с остатком:

$$u(\lambda) = s(\lambda) \cdot b(\lambda) + \tilde{u}(\lambda), \qquad \deg \tilde{u}(\lambda) < \deg b(\lambda).$$

Теперь

$$d(\lambda) = (s(\lambda) \cdot b(\lambda) + \tilde{u}(\lambda)) \cdot a(\lambda) + v(\lambda) \cdot b(\lambda) = \tilde{u}(\lambda) \cdot a(\lambda) + \tilde{v}(\lambda) \cdot b(\lambda),$$

где, как и утверждает теорема, $\deg \tilde{u}(\lambda) < \deg b(\lambda)$.

Неравенство

$$\deg \tilde{v}(\lambda) < \deg a(\lambda)$$

выполнено «автоматически», иначе бы оказалось, что

$$\deg d(\lambda) > \deg b(\lambda),$$

а этого не может быть.

1.4 Взаимно простые полиномы

Определение. Взаимно простые полиномы — это такие полиномы $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, для которых

$$\deg \text{НОД}(a(\lambda), b(\lambda)) = 0, \text{ или иначе: } \text{НОД}(a(\lambda), b(\lambda)) \equiv \text{ненулевое число}.$$

1.4.1 Критерий взаимной простоты

Теорема. Полиномы $a(\lambda), b(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие полиномы $u(\lambda), v(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, что

$$a(\lambda)u(\lambda) + b(\lambda)v(\lambda) = 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Доказательство необходимости. Пусть полиномы $a(\lambda), b(\lambda)$ взаимно просты, тогда $\text{НОД}(a(\lambda), b(\lambda)) = 1$, поэтому существуют $u(\lambda), v(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, такие, что $a(\lambda)u(\lambda) + b(\lambda)v(\lambda) = 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Доказательство достаточности. Пусть выполнено условие теоремы

$$a(\lambda)u(\lambda)+b(\lambda)v(\lambda)=1$$

и пусть полиномы $a(\lambda), b(\lambda)$ имеют общие делители:

$$\left\{\begin{array}{l} a(\lambda)=\varphi(\lambda)\tilde{a}(\lambda) \\ b(\lambda)=\varphi(\lambda)\tilde{b}(\lambda) \end{array}\right. ,$$

тогда

$$\varphi(\lambda)\cdot(a(\lambda)u(\lambda)+b(\lambda)v(\lambda))=1,$$

следовательно, $\deg\varphi(\lambda)=0$, т.е. полиномы $a(\lambda), b(\lambda)$ взаимно просты.

1.4.2 Свойства взаимно простых полиномов

1. $\left\{\begin{array}{l} f(\lambda)\ \text{ВП}\ \varphi_1(\lambda) \\ f(\lambda)\ \text{ВП}\ \varphi_2(\lambda) \\ \cdots\cdots\cdot \\ f(\lambda)\ \text{ВП}\ \varphi_k(\lambda) \end{array}\right. \iff f(\lambda)\ \text{ВП}\ \prod\limits_{j=1}^{k}\varphi_j(\lambda)$.

2. $\left\{\begin{array}{l} f(\lambda)h(\lambda)\div\varphi(\lambda) \\ f(\lambda)\ \text{ВП}\ \varphi(\lambda) \end{array}\right. \Longrightarrow h(\lambda)\div\varphi(\lambda)$.

3. $\left\{\begin{array}{l} f(\lambda)\div\varphi(\lambda) \\ f(\lambda)\div\psi(\lambda) \\ \varphi(\lambda)\ \text{ВП}\ \psi(\lambda) \end{array}\right. \Longrightarrow f(\lambda)\div(\varphi(\lambda)\psi(\lambda))$.

Доказательства свойств.

1. ($\Rightarrow$ для $k=2$.)

$$\left\{\begin{array}{l} f\cdot u+\varphi_1\cdot v=1 \\ f\cdot\tilde{u}+\varphi_2\cdot\tilde{v}=1 \end{array}\right. \Longrightarrow f\cdot(uf\tilde{u}+u\varphi_2\tilde{v}+\varphi_1 v\tilde{u})+(\varphi_1\varphi_2)\cdot(v\tilde{v})=1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f\cdot U+(\varphi_1\varphi_2)\cdot V=1 \Longrightarrow f\ \text{ВП}\ (\varphi_1\varphi_2)\ .$$

2. $$\left\{\begin{array}{l} fh=\varphi\alpha \\ fu+\varphi v=1 \end{array}\right. \Longrightarrow fuh+\varphi vh=h \Longrightarrow \varphi\alpha u+\varphi vh=h \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \varphi(\alpha u+vh)=h \Longrightarrow h\div\varphi\ .$$

3. $$\left\{\begin{array}{l} f=h\varphi \\ f=g\psi \\ \varphi u+\psi v=1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f=h\varphi \\ f=g\psi \\ f=f\varphi u+f\psi v=g\psi\varphi u+h\varphi\psi v=(\varphi\psi)(gu+hv) \end{array}\right. \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f\div(\varphi\psi)\ .$$

1.4.3 НОД нескольких полиномов: определение, теорема

Определение.

$$\text{НОД}(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_k(\lambda)) = d(\lambda) \Longleftrightarrow \begin{cases} f_1 \div d \\ f_2 \div d \\ f_3 \div d \\ \ldots\ldots \\ f_k \div d \\ (\forall j \in [1..k] \quad f_j \div h) \\ \Rightarrow d \div h \end{cases} .$$

Индуктивная теорема.

$$\underbrace{\text{НОД}(f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, f_k)}_{d} = \underbrace{\text{НОД}(\text{НОД}(f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}), f_k)}_{\tilde{d}} .$$

Доказательство.
$f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, f_k \div d \Longrightarrow \text{НОД}(f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}), f_k \div d \Longrightarrow \tilde{d} \div d$,
$\text{НОД}(f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}), f_k \div \tilde{d} \Longrightarrow f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, f_k \div \tilde{d} \Longrightarrow d \div \tilde{d}$,
и, таким образом, $d = \tilde{d}$ (с точностью до ненулевого числового множителя).

1.5 Корни полиномов и разложение на множители

1.5.1 Основные понятия и определения

Пусть по-прежнему $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}, \mathbb{F}_2$ — это поля $(\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{C})$, а $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ — это кольцо (коммутативное кольцо с единицей) полиномов над числовым полем $\mathbb{F}$.

Понятно, что каждый полином

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$$

определяет полиномиальные (целые рациональные) функции числового аргумента:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{F}, \\ \mathbb{F}_1 & \to & \mathbb{F}, \\ \mathbb{F} & \to & \mathbb{F}, \\ \mathbb{F}_2 & \to & \mathbb{F}_2, \\ \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}. \end{array}$$

Все эти функции традиционно обозначаются той же буквой, что и определяющий их полином — буквой f.

Если $c \in \mathbb{C}$, то символ $f(c)$ обозначает значение полиномиальной функции в точке c.

Определение корня. Число $c \in \mathbb{C}$ такое, что $f(c) = 0$, называется
корнем полинома $f(\lambda)$, или
решением уравнения $f(x) = 0$, или
нулем функции f.

Замечание к терминологии. Давно пора авторам русскоязычных математических текстов строго придерживаться понятного распределения терминов по понятиям:

у полиномов — корни,
у уравнений — решения,
у функций — нули.

Постараемся далее следовать сформулированному замечанию.

Корни и остатки. Если $f(\lambda) = (\lambda - c) \cdot q(\lambda) + r$, т.е. r — это остаток от деления полинома $f(\lambda)$ на бином $(\lambda - c)$, то

$$f(c) = r,$$

и, таким образом,

$$f(c) = 0 \Longleftrightarrow f(\lambda) \div (\lambda - c).$$

Это была т.н. теорема Безу (Étienne Bezout, $*$ 31.03.1730, † 27.09.1783).

Вывод. Задача нахождения корней полинома (решений полиномиального уравнения) и задача разложения полинома на линейные множители эквивалентны друг другу.

Кратные корни. Если оказывается, что

$$\exists\, k \geq 1 \qquad f(\lambda) = (\lambda - c)^k \cdot \varphi(\lambda) \quad \& \quad \varphi(c) \neq 0,$$

то говорят, что число c является k-кратным корнем полинома $f(\lambda)$, или k-кратным нулем полиномиальной функции f.

В частном случае, когда $k = 1$, говорят, что c есть простой (однократный) корень полинома, или простой нуль функции.

1.5.2 Разложение полинома в произведение неприводимых над полем $\mathbb{C}$

Теорема. Неприводимыми полиномами над полем $\mathbb{C}$ являются только биномы первой степени.

Доказательство. Пусть $P_n(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ есть полином над полем $\mathbb{C}$, пусть $\deg P_n = n \geq 1$, тогда по ОТА [19, с. 31] и согласно предыдущему

$$\begin{array}{ll}
P_n(\lambda) = (\lambda - \tilde{c}_1)P_{n-1}(\lambda); & \\
P_{n-1}(\lambda) = (\lambda - \tilde{c}_2)P_{n-2}(\lambda); & P_n(\lambda) = (\lambda - \tilde{c}_1)(\lambda - \tilde{c}_2)P_{n-2}(\lambda); \\
P_{n-2}(\lambda) = (\lambda - \tilde{c}_3)P_{n-2}(\lambda); & P_n(\lambda) = (\lambda - \tilde{c}_1)(\lambda - \tilde{c}_2)(\lambda - \tilde{c}_3)P_{n-3}(\lambda); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \tilde{c}_1)(\lambda - \tilde{c}_2)(\lambda - \tilde{c}_3)\ \ldots\ (\lambda - \tilde{c}_n) \cdot a_n\,.$$

Среди чисел $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \ldots, \tilde{c}_n$ могут быть и равные (есть кратные корни). Объединяя одинаковые биномы, получим

$$P_n(\lambda) = a_n \cdot (\lambda - c_1)^{k_1}(\lambda - c_2)^{k_2}(\lambda - c_3)^{k_3}\ \ldots\ (\lambda - c_S)^{k_S};$$

в этой формуле

$$k_j \text{ — кратность корня } c_j, \qquad k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_S = n,$$

$$c_j \neq c_t \text{ при } j \neq t.$$

Следствие 1. Если числа $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ попарно различны, а $P(c_1) = P(c_2) = \ldots = P(c_n) = 0$, то

$$\deg P \geq n \quad \text{или} \quad P(\lambda) \equiv 0.$$

Действительно, если $P \not\equiv 0$, то

$$P(\lambda) = (\lambda - c_1)(\lambda - c_2)\ \ldots\ (\lambda - c_n) \cdot Q(\lambda), \qquad \deg Q \geq 0,$$

т.е. $\deg P \geq n$.

Следствие 2. Если значения двух полиномов степени не выше n совпадают более чем в n точках, то это один и тот же полином. Более формально: если $\deg f, \deg g \leq n$, $N > n$, числа $c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ попарно различны и $\forall\, k \in [1..N]$ $f(c_k) = g(c_k)$, то $f = g$.

Доказательство. Рассмотрим полином $P(\lambda) = f(\lambda) - g(\lambda)$. По следствию 1 $P = O$, т.е. $f - g = O$ и, следовательно, $f = g$.

1.5.3 Разложение полинома в произведение неприводимых над полем $\mathbb{R}$

Теорема. Неприводимые полиномы над полем $\mathbb{R}$ суть только полиномы первой степени и второй степени с отрицательным дискриминантом.

Доказательство. Пусть

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n = P(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{C})$$

и пусть числа $x_1, x_2, \ldots x_S$ суть все вещественные корни полинома (их может и не быть вовсе) кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_S$, тогда

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{S} (\lambda - x_j)^{k_j} \cdot Q(\lambda), \quad \text{где} \quad \deg Q = 0 \vee \deg Q \geq 2.$$

Далее нас интересует случай $\deg Q \geq 2$.

У полинома $P(\lambda)$ есть и комплексные невещественные корни. Пусть таким корнем будет число z_0 : $P(z_0) = 0$. Коэффициенты полинома вещественны и поэтому совпадают со своими сопряженными: $\overline{a_k} = a_k$. Вычислим $\overline{P(z_0)}$:

$0 = \overline{0} = \overline{P(z_0)} = \overline{a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \ldots + a_n z_0^n} =$

$= \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{z_0} + \overline{a_2}\overline{z_0^2} + \ldots + \overline{a_n}\overline{z_0^n} = a_0 + a_1\overline{z_0} + a_2\overline{z_0^2} + \ldots + a_n\overline{z_0^n} =$

$= a_0 + a_1\overline{z_0} + a_2\overline{z_0}^2 + \ldots + a_n\overline{z_0}^n = P(\overline{z_0})$,

т.е. комплексное число, сопряженное корню, само является корнем полинома с вещественными коэффициентами.

Найдем теперь произведение двух линейных биномов с сопряженными корнями:

$$(\lambda - z_0)(\lambda - \overline{z}_0) = \lambda^2 - (z_0 + \overline{z}_0)\lambda + z_0\overline{z}_0 = \lambda^2 - 2\operatorname{Re} z_0 \cdot \lambda + |z_0|^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Такие вещественные триномы являются делителями полинома $Q(\lambda)$, и поэтому с учетом кратностей комплексных корней получим разложение исследуемого полинома в произведение неприводимых:

$$P(\lambda) = a_n \cdot \prod_{j=1}^{S} (\lambda - x_j)^{k_j} \cdot \prod_{j=1}^{T} (\lambda^2 + \alpha_j\lambda + \beta_j)^{r_j}.$$

В последней формуле $k_1 + k_2 + \ldots + k_S + 2(r_1 + r_2 + \ldots + r_T) = n = \deg P$.

Пример 1. Разложить полином $P(x) = x^4 + 1$ над $\mathbb{R}$ в произведение неприводимых.

Решение.

1. Найдем все комплексные корни полинома, решая уравнение четвертой степени $x^4 + 1 = 0$:
   $x^4 = -1 \iff x = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{i\pi}} = e^{i(\frac{\pi}{4})+k\frac{\pi}{2}}$;
   $$\begin{aligned} x_1 &= e^{i\frac{\pi}{4}}, \\ x_2 &= e^{i\frac{3\pi}{4}}, \\ x_3 &= e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \overline{x_2}, \\ x_4 &= e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \overline{x_1}. \end{aligned}$$
2. Представим полином произведением неприводимых биномов с комплексными коэффициентами:
   $x^4 + 1 = (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - e^{-i\frac{\pi}{4}}) \cdot (x - e^{i\frac{3\pi}{4}})(x - e^{-i\frac{3\pi}{4}}) =^*$
3. Перемножим попарно биномы с сопряженными корнями:
   $$\begin{aligned} &=^* (x_2 - 2\,\mathrm{Re}\,e^{i\frac{\pi}{4}} + (e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{4}})) \cdot (x_2 - 2\,\mathrm{Re}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} + (e^{i\frac{3\pi}{4}}e^{-i\frac{3\pi}{4}})) = \\ &= (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1). \end{aligned}$$
4. Можно сделать проверку вычислений, перемножая триномы.

Ответ. $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)$.

Пример 2. Разложить полином $P(x) = x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 32x + 16$ над полем $\mathbb{R}$ в произведение неприводимых.

Решение. Проведем ряд простых немотивированных преобразований:

$$\begin{aligned} &x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 32x + 16 = \\ &\qquad = x^4 - 6x^3 - 2x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 12x^2 - 8x - 24x + 16 = \\ &\qquad = (x^4 - 6x^3 + 4x^2) + (-2x^3 + 12x^2 - 8x) + (4x^2 - 24x + 16) = \\ &\qquad = x^2(x^2 - 6x + 4) - 2x(x^2 - 6x + 4) + 4(x^2 - 6x + 4) = \\ &\qquad = (x^2 - 2x + 4) \cdot (x^2 - 6x + 4) =^* \end{aligned}$$

Дискриминанты двух полученных сомножителей суть
$D_1 = 4 - 16 = -12 < 0,\ \ D_2 = 36 - 16 = 20 > 0,$ поэтому
$$=^* (x^2 - 2x + 4) \cdot (x - (3 - \sqrt{5})) \cdot (x - (3 + \sqrt{5}))\,.$$

1.6 Интерполяционная формула Лагранжа

Теорема. Если известны значения $c_k = P(z_k)$ полинома $P(z)$, $\deg P \le n$ (степени не выше n) в $(n+1)$-й точке z_k, то полином однозначно восстанавливается по этим известным значениям с помощью т. н. интерполяционной формулы Лагранжа (J. L. Lagrange, $*\,1736$, $\dagger\,1813$):

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k \frac{(z-z_1)\,\ldots\,(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\,\ldots\,(z-z_{n+1})}{(z_k-z_1)\,\ldots\,(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\,\ldots\,(z_k-z_{n+1})}\,.$$

Доказательство. Самостоятельно.

Практический расчет по этой формуле может быть несколько утомительным, поэтому полезно рассмотреть другой подход к решению интерполяционной задачи, также сводящийся к формуле Лагранжа, но в более замаскированной — алгоритмической — форме.

Сведение к системе алгебраических уравнений. Запишем искомый полином с неизвестными нам коэффициентами:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \,\ldots\, + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n.$$

Подставляя z_k и приравнивая известным значениям c_k, получим систему $(n+1)$-го уравнения с $(n+1)$-м неизвестным:

$$\left\{\begin{array}{rcccl} a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + & \ldots & + a_n z_1^n & = & c_1 \\ a_0 + a_1 z_2 + a_2 z_2^2 + & \ldots & + a_n z_2^n & = & c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 + a_1 z_n + a_2 z_n^2 + & \ldots & + a_n z_n^n & = & c_n \\ a_0 + a_1 z_{n+1} + a_2 z_{n+1}^2 + & \ldots & + a_n z_{n+1}^n & = & c_{n+1} \end{array}\right.$$

Расширенная матрица системы:

$$\left[\begin{array}{lllll|l} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^n & c_1 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^n & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^n & c_n \\ 1 & z_{n+1} & z_{n+1}^2 & \ldots & z_{n+1}^n & c_{n+1} \end{array}\right].$$

Детерминант основной матрицы — это определитель Вандермонда ;

$$\Delta = W(z_1, z_2, \,\ldots\,, z_n, z_{n+1}) = \prod_{1 \le j < i \le n+1} (z_i - z_j) \ne 0\,,$$

$$a_k = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta}, \qquad k = 0, 1, 2, \,\ldots\,, n\,.$$

1.7 Производный полином

1.7.1 Дифференцирование в кольце $\mathcal{P}(\mathbb{F})$

Определение. Дифференцированием в кольце $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ называется оператор $' : \mathcal{P}(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}(\mathbb{F})$, определяемый для произвольного полинома

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$$

формулой

$$f'(\lambda) = a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + \ldots + na_n\lambda^{n-1} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) .$$

Свойства оператора дифференцирования.

- $\left\{ \begin{array}{l} n \geq 1 \\ \deg f = n \end{array} \right. \Longrightarrow \deg f' = (n-1) ,$
- $\deg f = 0 \Longrightarrow \deg f' = -\infty, \qquad c' = 0 ,$
- $\deg f = -\infty \Longrightarrow \deg f' = -\infty, \qquad 0' = 0 ,$
- $(f+g)' = f' + g' ,$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \qquad (c \cdot f)' = c \cdot f'$ при $c \in \mathbb{F}$.

Последние два свойства характерны для любого **дифференцирования**.

Формула Лейбница.

$$\left(\prod_{k=1}^{n} u_k \right)' = \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{k=1 : k \neq j}^{n} u_k \right) \cdot u_j' .$$

Доказательство. Получается индукцией по числу сомножителей.

Частный случай формулы Лейбница.

$$(f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f' .$$

Замечание. Дифференцирование в кольце полиномов над некоторым полем $\mathbb{F}$ хотя и определено по аналогии с дифференцированием вещественных функций, но по сути определения не требует наличия топологии в поле $\mathbb{F}$, а потому имеет общеалгебраическое значение; в частности, дифференцирование может быть определено и в кольцах полиномов над конечными полями.

1.7.2 Кратные корни полинома

Сравним корни некоторого полинома $P(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ с корнями производного полинома $P'(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Теорема. Если $c_0 \in \mathbb{F}$ есть простой корень полинома $P(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, то $P'(c_0) \neq 0$, т.е. c_0 не является корнем производного полинома.

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\lambda) = (\lambda - c_0)Q(\lambda) \\ Q(c_0) \neq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P'(\lambda) = (\lambda - c_0)Q'(\lambda) + Q(\lambda) \\ P'(c_0) = 0 + Q(c_0) \neq 0 \end{array} \right. .$$

Теорема. Если $c_0 \in \mathbb{F}$ есть кратный корень полинома $P(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ (кратность равна $k \geq 2$), то $P'(c_0) = 0$, т.е. c_0 является корнем производного полинома, причем его кратность будет равна $(k-1) \geq 1$.

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\lambda) = (\lambda - c_0)^k Q(\lambda) \\ Q(c_0) \neq 0 \\ k \geq 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P'(\lambda) = (\lambda - c_0)^{k-1}[(\lambda - c_0)Q'(\lambda) + kQ(\lambda)] \\ [(\lambda - c_0)Q'(\lambda) + kQ(\lambda)]\Big|_{\lambda = c_0} = kQ(c_0) \neq 0 \end{array} \right. .$$

Обратное неверно.

Контрпример. Теорема обратная предыдущей не имеет места. Действительно, пусть

$$P(\lambda) = \lambda^7 - 5; \quad P'(\lambda) = 7\lambda^6 .$$

Число 0 является шестикратным корнем производного полинома, но не является корнем исходного полинома.

1.7.3 Обнаружение кратных корней

Алгоритм. Для обнаружения кратных корней достаточно для полинома $P(\lambda)$ найти производный полином $P'(\lambda)$ и НОД первообразного и производного полиномов:

$$d(\lambda) = \text{НОД}(P(\lambda), P'(\lambda)) = a_0 \cdot \prod_{j=1}^{S} (\lambda - c_j)^{k_j - 1};$$

a_0 — числовой множитель, c_j — кратные корни первообразного полинома.

1.7.4 Понижение степени уравнения с полиномом, имеющим кратные корни

Используя результаты предыдущего пункта, для любого полиномиального уравнения можно найти уравнение, ему эквивалентное, но имеющее только простые корни (степень его будет ниже степени исходного); для этого достаточно найти частное

$$p(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{d(\lambda)} = a_0 \cdot (\lambda - c_1) \, \ldots \, (\lambda - c_S) \cdot (\lambda - c_{S+1}) \, \ldots \, (\lambda - c_{S+T});$$

в последней формуле a_0 — постоянное число, $c_1, c_2, \ldots, c_S$ — кратные корни полинома P, $c_{S+1}, \ldots, c_{S+T}$ — простые корни полинома P.

Вывод. Вместо уравнения $P(x) = 0$ можно решать ему эквивалентное уравнение $p(x) = 0$.

Пример. Решить полиномиальное уравнение

$$x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0\,.$$

Решение. Для исходного полинома

$$P(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$$

найдем производный:

$$P'(x) = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12\,.$$

Найдем их НОД:

$$\text{НОД}(P, P')(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2\,.$$

Разделим исходный полином на НОД:

$$\frac{x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4}{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2} = x^2 - x - 2\,.$$

Уравнение

$$x^2 - x - 2 = 0$$

имеет те же корни, что и исходное:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 2\,.$$

1.8 Метод и схема Горнера

1.8.1 Метод Горнера

Пусть задан полином n-й степени (для определенности — 7-й)

$$P(\lambda) = a_7\lambda^7 + a_6\lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\,.$$

Подумаем, как наиболее экономно вычислить значение полинома (полиномиальной функции) в точке z_0.

Обычно это делают так:

$$P(z_0) = ((((((a_7\cdot z_0+a_6)\cdot z_0+a_5)\cdot z_0+a_4)\cdot z_0+a_3)\cdot z_0+a_2)\cdot z_0+a_1)\cdot z_0+a_0\,.$$

Всего проведено 7 умножений и 7 сложений.

Это и есть т. н. метод Горнера (W. G. Horner, $*\,1786$, $\dagger\,1837$), который уже постоянно применялся Ньютоном (Isaac Newton, $*\,1643$, $\dagger\,1727$).

1.8.2 Схема Горнера

По сути: по числам $a_7,\ a_6,\ a_5,\ a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0,\ z_0$ последовательно вычисляется новая последовательность чисел $b_6,\ b_5,\ b_4,\ b_3,\ b_2,\ b_1,\ b_0,\ P(z_0)$ с помощью нехитрой последовательности действий (конкретный | общий случаи):

$$\begin{array}{rcl|rcl}
b_6 &=& a_7, & b_{n-1} &=& a_n, \\
b_5 &=& b_6\cdot z_0 + a_6, & b_{n-2} &=& b_{n-1}\cdot z_0 + a_{n-1}, \\
b_4 &=& b_5\cdot z_0 + a_5, & \ldots\ldots &\ldots\ldots& \ldots\ \ldots \\
b_3 &=& b_4\cdot z_0 + a_4, & b_{k-1} &=& b_k\cdot z_0 + a_k, \\
b_2 &=& b_3\cdot z_0 + a_3, & \ldots\ldots &\ldots\ldots& \ldots\ \ldots \\
b_1 &=& b_2\cdot z_0 + a_2, & b_1 &=& b_2\cdot z_0 + a_2, \\
b_0 &=& b_1\cdot z_0 + a_1, & b_0 &=& b_1\cdot z_0 + a_1, \\
P(z_0) &=& b_1\cdot z_0 + a_0. & P(z_0) &=& b_1\cdot z_0 + a_0.
\end{array}$$

Таким образом, последовательность элементарных вычислительных шагов производится по формулам

$$b_{n-1} = a_n\,, \qquad b_{k-1} = b_k\cdot z_0 + a_k$$

над элементами следующей таблицы (схемы), в которую заносятся и результаты вычислений:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
z_0 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & P(z_0)
\end{array}\,.$$

Это и есть схема Горнера.

Пример 1. Применяя схему Горнера, вычислить значение $P(3)$ для полинома $P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda + 1$.

Решение. Готовим схему

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & 1 & -3 & 2 & -5 & 1 \\ \hline 3 & & & & & \end{array}.$$

Последовательно заполняем пустые клетки схемы:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & 1 & -3 & 2 & -5 & 1 \\ \hline 3 & 1 & & & & \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & 1 & -3 & 2 & -5 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 & & & \end{array},$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & 1 & -3 & 2 & -5 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 2 & & \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & 1 & -3 & 2 & -5 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & \end{array},$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & 1 & -3 & 2 & -5 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}.$$

Ответ. $P(3) = 4$.

Пример 2. Применяя схему Горнера, вычислить значение $P(7)$ для полинома $P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda + 1$.
Решение с помощью схемы Горнера:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & 1 & -3 & 2 & -5 & 1 \\ \hline 7 & 1 & 4 & 30 & 205 & 1436 \end{array}.$$

Сравним наши результаты с делением «углом»:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\lambda^4 & -\,3\lambda^3 & +\,2\lambda^2 & -\,5\lambda & +\,1 & \lambda - 7 \\ \cline{6-6}
\lambda^4 & -\,7\lambda^3 & & & & \lambda^3 + 4\lambda^2 + 30\lambda + 205 \\ \cline{1-2}
 & 4\lambda^3 & +2\lambda^2 & & & \\
 & 4\lambda^3 & -28\lambda^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 30\lambda^2 & -5\lambda & & \\
 & & 30\lambda^2 & -210\lambda & & \\ \cline{3-4}
 & & & 205\lambda & +1 & \\
 & & & 205\lambda & +1 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 1436 &
\end{array}$$

Оказывается!.. Числа b_k — это коэффициенты частного?!

Для доказательства очевидной гипотезы запишем частное с неизвестными коэффициентами b_k, раскроем скобки и приравняем коэффициенты при степенях λ:

$$a_7\lambda^7 + a_6\lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 =$$
$$= (b_6\lambda^6 + b_5\lambda^5 + b_4\lambda^4 + b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)(\lambda - z_0) + P(z_0)\,,$$

$$\begin{aligned}
\lambda^7 :&\quad a_7 = b_6\,,\\
\lambda^6 :&\quad a_6 = b_5 - b_6\cdot z_0\,,\\
\lambda^5 :&\quad a_5 = b_4 - b_5\cdot z_0\,,\\
\lambda^4 :&\quad a_4 = b_3 - b_4\cdot z_0\,,\\
\lambda^3 :&\quad a_3 = b_2 - b_3\cdot z_0\,,\\
\lambda^2 :&\quad a_2 = b_1 - b_2\cdot z_0\,,\\
\lambda^1 :&\quad a_1 = b_0 - b_1\cdot z_0\,,\\
\lambda^0 :&\quad a_0 = P(z_0) - b_0\cdot z_0\,.
\end{aligned}$$

1.8.3 Разложение полинома по степеням бинома $(\lambda - z_0)$

Применим аналогичное разложение к первому частному:

$$P(\lambda) = (\lambda - z_0)[(\lambda - z_0)Q_2(\lambda) + Q_1(z_0)] + P(z_0);$$

ко второму:

$$P(\lambda) = (\lambda - z_0)[(\lambda - z_0)[(\lambda - z_0)Q_3(\lambda) + Q_2(z_0)] + Q_1(z_0)] + P(z_0);$$

к третьему:

$$P(\lambda) = (\lambda - z_0)[(\lambda - z_0)[(\lambda - z_0)[(\lambda - z_0)Q_4(\lambda) + Q_3(z_0)] +$$
$$+Q_2(z_0)] + Q_1(z_0)] + P(z_0);$$

и т.д.

После раскрытия квадратных скобок получается разложение исходного полинома $P(\lambda)$ по степеням $(\lambda - z_0)$:

$$P(\lambda) = Q_n(z_0)(\lambda - z_0)^n + Q_{n-1}(z_0)(\lambda - z_0)^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + Q_3(z_0)(\lambda - z_0)^3 + Q_2(z_0)(\lambda - z_0)^2 + Q_1(z_0)(\lambda - z_0) + P(z_0)\,,$$

где по формуле Тейлора

$$Q_k(z_0) = \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}, \qquad P^{(k)}(z_0) = k!\cdot Q_k(z_0)\,.$$

Перед нами метод разложения полинома по степеням $(\lambda - z_0)$ путем последовательного деления промежуточных частных на бином $(\lambda - z_0)$.

1.8.4 Полная схема Горнера

Рассмотренный метод разложения можно реализовать в виде полной схемы Горнера:

	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
z_0	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	$P(z_0)$
z_0	c_5	c_4	c_3	c_2	c_1	c_0	$Q_1(z_0)$	
z_0	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0	$Q_2(z_0)$		
z_0	e_3	e_2	e_1	e_0	$Q_3(z_0)$			
z_0	f_2	f_1	f_0	$Q_4(z_0)$				
z_0	g_1	g_0	$Q_5(z_0)$					
z_0	h_0	$Q_6(z_0)$						
z_0	$Q_7(z_0)$							

Пример 1. Вычислить значение всех производных в точке $z_0 = -2$ для полинома

$$P(\lambda) = 3\lambda^5 + 15\lambda^4 + 60\lambda^3 + 160\lambda^2 + 161\lambda + 11\,.$$

Решение. Применим полную схему Горнера.

- Разложим полином по степеням $(\lambda + 2)$:

	3	15	60	160	161	11
-2	3	9	42	76	9	-7
-2	3	3	36	4	1	
-2	3	-3	42	-80		
-2	3	-9	60			
-2	3	-15				
-2	3					

$$P(\lambda) = 3(\lambda+2)^5 - 15(\lambda+2)^4 + 60(\lambda+2)^3 - 80(\lambda+2)^2 + (\lambda+2) - 7.$$

- Применим формулу Тейлора:

$P^{(k)}(-2) = 0,$ при $k > 5,$

$P^{(5)}(-2) = 5! \cdot 3 = 360,$

$P^{(4)}(-2) = 4! \cdot (-15) = -360,$

$P^{(3)}(-2) = 3! \cdot 60 = 360,$

$P^{(2)}(-2) = 2! \cdot (-80) = -160,$

$P^{(1)}(-2) = 1! \cdot 1 = 1,$

$P^{(0)}(-2) = P(-2) = -7.$

Замечание. Разнообразные задачи на применение схемы Горнера можно найти в задачниках [17, 18].

Пример 2. Пользуясь схемой Горнера, разложить правильную дробь $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x+1)^5}$ в сумму простейших дробей.

Решение.

- Разложим числитель по степеням бинома $(x+1)$, используя полную схему Горнера:

	1	0	-2	0	3
-1	1	-1	-1	1	2
-1	1	-2	1	0	
-1	1	-3	4		
-1	1	-4			
-1	1				

  Вот это разложение:

$$x^4 - 2x^2 + 3 = (x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 4(x+1)^2 + 0(x+1) + 2\,.$$

- Проведем эквивалентные преобразования исходной дроби:

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x+1)^5} = \frac{(x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 4(x+1)^2 + 0(x+1) + 2}{(x+1)^5} =$$

$$= \frac{1}{(x+1)} + \frac{-4}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^5}\,.$$

2 Симметрические и эрмитовы, ортогональные и унитарные матрицы

2.1 Унарные операции над матрицами

2.1.1 Транспонирование

Этот вопрос подробно изложен (а студентами тщательно изучен) в материалах 1-го семестра [19].

Основные формулы.

$$A = (a_{ij}); \quad A^\top = ({a^\top}_{ij}); \quad {a^\top}_{ij} = a_{ji}; \quad (A^\top)^\top = A; \quad \det A^\top = \det A.$$

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top; \quad (A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top; \quad (A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}.$$

2.1.2 Комплексное сопряжение

Комплексное сопряжение — это поэлементное комплексное сопряжение матрицы, т.е. если $A = (a_{ij})_{m\times n}$, то $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{m\times n}$.

Основные свойства комплексного сопряжения.

- $\overline{\overline{A}} = A$.
- $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.
- $\overline{(\alpha A)} = \overline{\alpha}\,\overline{A}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$.
- $\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.
- $\det \overline{A} = \overline{(\det A)}$.
- $\overline{(A^{-1})} = (\overline{A})^{-1}$.
- Если $A = \overline{A}$, то $\forall i, j \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$, т.е. A — вещественная матрица.

Пример.
$$A = \begin{bmatrix} 4-5i & 6+7i \\ 2i & 9 \end{bmatrix},$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 4+5i & 6-7i \\ -2i & 9 \end{bmatrix}.$$

2.1.3 Симметризация (симметрирование); симметрические матрицы

Определение. Если $A = (a_{ij})_{n\times n}$ есть квадратная матрица, то

$$A^{sym} = \frac{1}{2}(A + A^{\top}), \qquad a_{ij}^{sym} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}.$$

Свойства симметризации.

- $(A^{sym})^{sym} = A^{sym}$.
- $(A + B)^{sym} = A^{sym} + B^{sym}$.
- $(\alpha A)^{sym} = \alpha A^{sym}$.

Определение. Матрица A называется симметрической, если

$$A^{sym} = A.$$

Критерий симметричности матрицы.

$$A = A^{\top}, \qquad \text{поэлементно: } a_{ij} = a_{ji}.$$

Доказательство. $A = \dfrac{1}{2}(A + A^{\top}) \Longleftrightarrow A = A^{\top}$.

Теорема. Если A — симметрическая и невырожденная, то A^{-1} — вновь матрица симметрическая и невырожденная.

Доказательство. $A = A^{\top} \Longrightarrow A^{-1} = (A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$.

Пример. Симметризовать матрицу A :

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}. \quad A^{\top} = \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \quad A^{sym} = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

2.1.4 Альтернация (альтернирование); кососимметрические матрицы

Определение. Если $A = (a_{ij})_{n\times n}$ есть квадратная матрица, то

$$A^{alt} = \frac{1}{2}(A - A^{\top}), \qquad a_{ij}^{alt} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}.$$

Свойства альтернации.

- $(A^\top)^{alt} = (A^{alt})^\top = -A^{alt}$.
- $(A^{alt})^{alt} = A^{alt}$.
- $(A+B)^{alt} = A^{alt} + B^{alt}, \qquad (\alpha A)^{alt} = \alpha A^{alt}$.

Определение. Матрица A называется кососимметрической, если

$$A^{alt} = A\,.$$

Критерий кососимметричности матрицы.

$$A = -A^\top, \text{ в поэлементной записи: } a_{ij} = -a_{ji}.$$

Доказательство.

$$A = \frac{1}{2}(A - A^\top) \Longleftrightarrow A = -A^\top\,.$$

Следствие. В кососимметрической матрице диагональные элементы равны нулю: $a_{ii} = 0$.

Пример. Альтернировать матрицу A :

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & -8 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$A^\top = \begin{bmatrix} -9 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & -7 \\ -8 & 10 & 6 \end{bmatrix}; \quad A^{alt} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -6 \\ -1/2 & 0 & 17/2 \\ 6 & -17/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема разложения. Всякая квадратная матрица единственным образом разложима в сумму симметрической и кососимметрической матриц:

$$A = A^{sym} + A^{alt}\,.$$

Доказательство. Такое разложение имеет место, т.к.

$$A^{sym} + A^{alt} = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top) = A\,.$$

Покажем единственность такого разложения.

$$\begin{cases} A = B + C \\ B = B^\top \\ C = -\,C^\top \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = B + C \\ A^\top = B - C \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{A + A^\top}{2} = A^{sym} \\ C = \dfrac{A - A^\top}{2} = A^{alt} \end{cases}.$$

2.1.5 Эрмитово сопряжение; эрмитовы матрицы (самосопряженные матрицы)

Определение. Эрмитовым (Charles Hermite, $*\,1822$, $\dagger\,1901$) сопряжением называется суперпозиция транспонирования и комплексного сопряжения:

$$A^* = \overline{(A^\top)} = \overline{A}^{\,\top}\,,$$

в поэлементной записи

$$a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}\,.$$

Пример. Для матрицы A найти эрмитово сопряженную.

$$A = \begin{bmatrix} (3+7i) & (4-2i) & 6 \\ 0 & 5i & (5-i) \\ (3+8i) & -4 & 8 \end{bmatrix}; \quad A^* = \begin{bmatrix} (3-7i) & 0 & (3-8i) \\ 4+2i & -5i & -4 \\ 6 & (5+i) & 8 \end{bmatrix}.$$

Свойства эрмитова сопряжения.

- $(A + B)^* = A^* + B^*$.
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.
- $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.
- $(A^\top)^* = \overline{A}$, $\quad (A^*)^\top = \overline{A}$, $\quad (\overline{A})^* = A^\top$, $\quad \overline{(A^*)} = A^\top$.

Определение. Матрица называется эрмитовой (или самосопряженной), если $A = A^*$.

Теорема. В эрмитовой матрице диагональные элементы обязательно вещественные.

Доказательство.

$$a_{ii} = \overline{a_{ii}} \iff a_{ii} \in \mathbb{R}.$$

2.1.6 Особенности чисто вещественного случая

Если A — это матрица над полем $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$ (состоит только из вещественных чисел), то

$$\overline{A} = A, \qquad A^* = A^\top, \qquad A \text{ эрмитова} \iff A \text{ симметрическая.}$$

2.2 Ортогональные матрицы; группа ортогональных матриц

Предварительное замечание. Понятие «ортогональность» относится всегда только к **вещественным** матрицам. Поэтому в этом вопросе рассматриваются матрицы только с **вещественными** коэффициентами.

2.2.1 Ортогональность столбцов и ортогональность строк

Определение. Матрицы-столбцы

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

называются ортогональными, если

$$\vec{a}^\top \cdot \vec{b} = 0,$$

в поэлементной записи

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0.$$

Понятно, что условия

$$\vec{a}^\top \cdot \vec{b} = 0, \qquad \vec{b}^\top \cdot \vec{a} = 0$$

логически эквивалентны.

Определение. Матрицы-строки

$$\vec{a} = \left[\ a_1\, a_2\ \ldots\ a_n\ \right],$$

$$\vec{b} = \left[\ b_1\, b_2\ \ldots\ b_n\ \right]$$

называются ортогональными, если

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^{\top} = 0,$$

в поэлементной записи

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0.$$

Понятно, что условия

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^{\top} = 0, \qquad \vec{b} \cdot \vec{a}^{\top} = 0$$

логически эквивалентны.

Определение. Матрица-столбец

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

называется нормированной, если

$$\vec{a}^{\top} \cdot \vec{a} = 1, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1.$$

Определение. Матрица-строка

$$\vec{a} = \left[\ a_1\, a_2\ \ldots\ a_n\ \right]$$

называется нормированной, если

$$\vec{a} \cdot \vec{a}^{\top} = 1, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1.$$

2.2.2 Ортогональные матрицы

Определение. Квадратная матрица A над $\mathbb{R}$ называется ортогональной, если имеет место матричное соотношение

$$A \cdot A^{\top} = E\,, \tag{$*$}$$

что эквивалентно

$$A^{-1} = A^{\top}\,, \tag{$**$}$$

что, в свою очередь, эквивалентно

$$A^{\top} \cdot A = E\,. \tag{$***$}$$

Теорема. В ортогональной матрице строки попарно ортогональны и все нормированы.

Доказательство. Поэлементная запись соотношения $(*)$ дает

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^{\top} = \delta_{ij} \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}\ .$$

Это соотношение можно интерпретировать в терминах ортогональности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{строка } \vec{a}_i \text{ ортогональна строке } \vec{a}_j \text{ при } i \neq j, \\ \text{строка } \vec{a}_i \text{ нормирована,} \end{array} \right. \tag{$****$}$$

что эквивалентно требуемому.

Теорема. В ортогональной матрице столбцы попарно ортогональны и все нормированы.

Доказательство. Поэлементная запись соотношения $(***)$ дает

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{\top} a_{kj} = \delta_{ij} \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}\ .$$

Это соотношение можно интерпретировать в терминах ортогональности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{столбец } \vec{a}_i \text{ ортогонален столбцу } \vec{a}_j \text{ при } i \neq j, \\ \text{столбец } \vec{a}_i \text{ нормирован,} \end{array} \right. \tag{$*****$}$$

что эквивалентно требуемому.

2.2.3 Детерминант ортогональной матрицы

Теорема. Для всякой ортогональной матрицы A

$$\det A = 1 \quad \text{или} \quad \det A = -1.$$

Доказательство.

$$(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^\top = \det(A \cdot A^\top) = \det E = 1,$$

что эквивалентно требуемому.

2.2.4 Группа ортогональных матриц

Обозначение. Множество всех ортогональных матриц n-го порядка обозначают $O(n)$.

Теорема. Множество $O(n)$ в паре с операцией матричного умножения является группой.

Доказательство. Покажем, что операция матричного умножения на $O(n)$ обладает необходимыми свойствами:

- Замкнутость, т.е. $A, B \in O(n) \Longrightarrow (AB) \in O(n)$.
  Действительно,

  $$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot A^\top = E_n \\ B \cdot B^\top = E_n \end{array} \right. \Longrightarrow (AB) \cdot (AB)^\top = ABB^\top A^\top = E_n.$$

- Существование нейтрального по умножению элемента.
  Действительно, $E_n \in O(n)$, т.к. $E_n \cdot (E_n)^\top = E_n$.

- Каждая ортогональная матрица обратима, и обратная к ортогональной вновь является ортогональной матрицей. Действительно,

  $$A^{-1} = A^\top \in O(n).$$

Определение. Группа с носителем $O(n)$ вновь обозначается $O(n)$ и именуется «ортогональная группа матриц n-го порядка».

Эта группа является подгруппой группы всех невырожденных матриц порядка n с вещественными коэффициентами — $GL_n(\mathbb{R})$ (полная линейная группа степени n над $\mathbb{R}$).

2.2.5 Вложение попарно ортогональных нормированных строк вещественных чисел в ортогональную матрицу

Пусть дано k строк вещественных чисел длины $n > k$, которые попарно ортогональны и нормированы:

$$\begin{array}{l}
\vec{x}_1 = [x_{11} \quad x_{12} \ \ldots \ x_{1n}]\,, \\
\vec{x}_2 = [x_{21} \quad x_{22} \ \ldots \ x_{2n}]\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{x}_k = [x_{k1} \quad x_{k2} \ \ldots \ x_{kn}]\,, \qquad k < n\,.
\end{array}$$

Можно ли построить $(k+1)$-ю нормированную строку, которая ортогональна всем заданным?

Для ответа на этот вопрос возьмем строку неизвестных чисел

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{z}^{\top} = [z_1 \quad z_2 \ \ldots \ z_n]$$

и запишем условия ее ортогональности с каждой из заданных строк и еще условие ее нормированности:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l}
x_{11}z_1 + x_{12}z_2 + \ \ldots \ + x_{1n}z_n = 0 \\
x_{21}z_1 + x_{22}z_2 + \ \ldots \ + x_{2n}z_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{k1}z_1 + x_{k2}z_2 + \ \ldots \ + x_{kn}z_n = 0
\end{array} \right. \\
\\
\quad z_1^2 + z_2^2 + \ \ldots \ + z_n^2 = 1
\end{array} \right. .$$

Внутренняя система — это однородная СЛАУ с основной матрицей $(x_{ij})_{k\times n}$ — имеет ненулевое решение: столбец $\vec{z}^{\,o}$. Найдем сумму квадратов элементов этого столбца:

$$r^2 = (\vec{z}^{\,o})^{\top} \cdot \vec{z}^{\,o} > 0.$$

Столбец $\vec{z} = \dfrac{1}{r}\vec{z}^{\,o}$ удовлетворяет всей системе, поэтому строка $\vec{x}_{k+1} = \vec{z}^{\top}$ является решением поставленной нами задачи.

Условие $k < n$ существенно, т.к. уже при $k = n$ однородная СЛАУ имеет только нулевое решение $\vec{z}^{\,o} = \vec{0}$, которое нельзя нормировать.

2.2.6 Блочные ортогональные матрицы

Теорема. Если A, B суть ортогональные матрицы (их размеры в общем случае не совпадают), то блочная матрица $D = \left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right]$ является ортогональной. В частности, матрица $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right]$ ортогональна.

Доказательство. Если перемножить два столбца из левого пояса, или перемножить два столбца из правого пояса, или перемножить два столбца из разных поясов, то произведения будут равны нулю; сумма же квадратов элементов каждого столбца по-прежнему будет равна единице.

Пример. Вот блочная ортогональная матрица

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 4/5 & -3/5 & 0 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & 0 & -12/13 & 5/13 \end{array}\right].$$

2.3 Унитарные матрицы; группа унитарных матриц

Предварительное замечание. Понятие «унитарность» относится к комплексным матрицам. Поэтому в этом вопросе рассматриваются матрицы с комплексными (и с вещественными) коэффициентами.

2.3.1 Ортогональность столбцов и ортогональность строк

Определение. Матрицы-столбцы $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ называются ортогональными, если

$$\vec{a}^* \cdot \vec{b} = 0,$$

в поэлементной записи

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k b_k = 0.$$

Понятно, что условия

$$\vec{a}^* \cdot \vec{b} = 0, \qquad \vec{b}^* \cdot \vec{a} = 0$$

логически эквивалентны.

Определение. Матрицы-строки

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \, a_2 \, \ldots \, a_n \end{bmatrix},$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \, b_2 \, \ldots \, b_n \end{bmatrix}$$

называются ортогональными, если

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^* = 0,$$

в поэлементной записи

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k = 0.$$

Понятно, что условия

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^* = 0, \qquad \vec{b} \cdot \vec{a}^* = 0$$

логически эквивалентны.

Определение. Матрица-столбец $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ называется нормированной, если

$$\vec{a}^* \cdot \vec{a} = 1, \qquad \text{т.е.} \qquad \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} \cdot a_k = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = 1.$$

Определение. Матрица-строка $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \, a_2 \, \ldots \, a_n \end{bmatrix}$ называется нормированной, если

$$\vec{a} \cdot \vec{a}^* = 1, \qquad \text{т.е.} \qquad \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = 1.$$

2.3.2 Унитарные матрицы

Определение. Квадратная матрица A называется унитарной, если

$$A \cdot A^* = E, \tag{$*$}$$

что эквивалентно

$$A^{-1} = A^*, \tag{$**$}$$

что, в свою очередь, эквивалентно

$$A^* \cdot A = E. \tag{$***$}$$

Теорема. В унитарной матрице строки попарно ортогональны и все нормированы.

Доказательство. Поэлементная запись соотношения $(*)$ дает

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^*_{kj} = \delta_{ij} \text{ или } \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \bar{a}_{jk} = \delta_{ij}.$$

Это соотношение можно интерпретировать в терминах ортогональности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{строка } \vec{a}_i \text{ ортогональна строке } \vec{a}_j \text{ при } i \neq j \\ \text{строка } \vec{a}_i \text{ нормирована} \end{array} \right. , \qquad (****)$$

что эквивалентно требуемому.

Теорема. В унитарной матрице столбцы попарно ортогональны и все нормированы.

Доказательство. Легко получается при использовании соотношения $(***)$ в поэлементной записи.

2.3.3 Детерминант унитарной матрицы

Теорема. Для всякой унитарной матрицы A

$$|\det A| = 1.$$

Доказательство.
$|\det A|^2 = \det A \cdot \overline{\det A} = \det A \cdot \overline{\det A^\top} = \det A \cdot \det \overline{A^\top} =$
$= \det A \cdot \det A^* = \det(A \cdot A^*) = \det E = 1,$
что эквивалентно требуемому.

2.3.4 Группа унитарных матриц

Обозначение. Множество всех унитарных матриц n-го порядка обозначают $U(n)$.

Теорема. Множество $U(n)$ в паре с операцией матричного умножения является группой.

Доказательство. Покажем, что операция матричного умножения на $U(n)$ обладает необходимыми свойствами:

- Замкнутость, т.е. $A, B \in U(n) \Longrightarrow (AB) \in U(n)$.
  Действительно,
  $$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot A^* = E_n \\ B \cdot B^* = E_n \end{array} \right. \Longrightarrow (AB) \cdot (AB)^* = ABB^*A^* = E_n.$$

- Существование нейтрального по умножению элемента. Действительно, $E_n \in U(n)$, т.к. $E_n \cdot E_n^* = E_n$.

- Каждая унитарная матрица обратима, и обратная к унитарной вновь является унитарной матрицей. Действительно,
  $$A^{-1} = A^* \in U(n).$$

Определение. Группа с носителем $U(n)$ вновь обозначается $U(n)$ и именуется «унитарная группа матриц n-го порядка».

Эта группа является подгруппой группы всех невырожденных матриц порядка n с комплексными коэффициентами — $GL_n(\mathbb{C})$ (полная линейная группа степени n над $\mathbb{C}$).

2.3.5 Отношения включения между некоторыми группами

Если кроме рассмотренных групп иметь в виду еще группы $SL_n(\mathbb{F})$ — группы матриц над полем $\mathbb{F}$ с определителями, равными 1 (специальные линейные группы степени n над $\mathbb{F}$), — то можно записать следующие соотношения включений групп и подгрупп:

$$O(n) \sqsubset GL_n(\mathbb{R}) \sqsubset GL_n(\mathbb{C}),$$
$$O(n) \sqsubset U(n) \sqsubset GL_n(\mathbb{C}),$$
$$SL_n(\mathbb{R}) \sqsubset GL_n(\mathbb{R}),$$
$$SL_n(\mathbb{R}) \sqsubset SL_n(\mathbb{C}) \sqsubset GL_n(\mathbb{C}).$$

2.3.6 Вложение попарно ортогональных нормированных строк комплексных чисел в унитарную матрицу

Пусть дано k строк комплексных чисел длины $n > k$, которые попарно ортогональны и нормированы:

$$\begin{array}{l} \vec{x}_1 = [x_{11} \quad x_{12} \ \dots \ x_{1n}], \\ \vec{x}_2 = [x_{21} \quad x_{22} \ \dots \ x_{2n}], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{x}_k = [x_{k1} \quad x_{k2} \ \dots \ x_{kn}], \qquad k < n. \end{array}$$

Можно ли построить $(k+1)$-ю нормированную строку, которая ортогональна всем заданным?

Для ответа на этот вопрос возьмем строку неизвестных комплексных чисел

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{z}^{\top} = [z_1 \quad z_2 \ \dots \ z_n]$$

и запишем условия ее ортогональности с каждой из заданных строк плюс условие ее нормированности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x_{11}z_1 + x_{12}z_2 + \ \dots \ + x_{1n}z_n = 0 \\ x_{21}z_1 + x_{22}z_2 + \ \dots \ + x_{2n}z_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{k1}z_1 + x_{k2}z_2 + \ \dots \ + x_{kn}z_n = 0 \end{array} \right. \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ \dots \ + |z_n|^2 = 1 \end{array} \right. .$$

Внутренняя система — это однородная СЛАУ с основной матрицей $(x_{ij})_{k\times n}$ — имеет ненулевое решение: столбец $\vec{z}^{\,o}$. Найдем сумму квадратов модулей элементов этого столбца

$$r^2 = (\vec{z}^{\,o})^* \cdot \vec{z}^{\,o} > 0.$$

Столбец $\vec{z} = \dfrac{1}{r}\vec{z}^{\,o}$ удовлетворяет всей системе, поэтому строка $\vec{x}_{m+1} = \vec{z}^{\top}$ является решением поставленной нами задачи.

Условие $k < n$ существенно, т.к. уже при $k = n$ однородная СЛАУ имеет только нулевое решение $\vec{z}^{\,o} = \vec{0}$, которое нельзя нормировать.

2.3.7 Блочные унитарные матрицы

Теорема. Если A, B суть унитарные матрицы (их размеры в общем случае не совпадают), то блочная матрица $D = \left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right]$ является унитарной. В частности, матрица $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\cdots0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right]$ унитарна.

Доказательство. Аналогично доказательству для ортогональных матриц.

2.4 Полная проблема собственных значений эрмитовых матриц

2.4.1 Собственные значения эрмитовой (самосопряженной) матрицы

Теорема. Собственные значения всякой эрмитовой (самосопряженной) матрицы вещественны.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \qquad A = A^*, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}\,.$$

Тогда имеет место импликация: $\vec{x}^{\,*}A\vec{x} = \lambda\vec{x}^{\,*}\vec{x} \Longrightarrow \vec{x}^{\,*}A\vec{x} = \bar{\lambda}\vec{x}^{\,*}\vec{x}\,.$
Но $(\vec{x}^{\,*}\vec{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^2 > 0$, поэтому $\lambda = \bar{\lambda} \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Следствие. Собственные значения всякой вещественной симметрической матрицы вещественны.

2.4.2 Собственные векторы эрмитовой матрицы

Теорема. Собственные векторы эрмитовой (самосопряженной) матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Формально:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1. & A = A^* \\ 2. & A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1 \\ 3. & A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2 \\ 4. & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{x}_2^{\,*} \cdot \vec{x}_1 = 0\,.$$

Доказательство.
Из 2: $\quad \vec{x}_2^{\,*}A\vec{x}_1 = \lambda_1(\vec{x}_2^{\,*} \cdot \vec{x}_1)$.
Из 3: $\quad \vec{x}_2^{\,*}A^*\vec{x}_1 = \bar{\lambda}_2(\vec{x}_2^{\,*} \cdot \vec{x}_1) = \lambda_2(\vec{x}_2^{\,*} \cdot \vec{x}_1)$.
Из 1: $\quad \vec{x}_2^{\,*}A\vec{x}_1 = \lambda_2(\vec{x}_2^{\,*} \cdot \vec{x}_1)$.
Сравнивая первую и последнюю строки:
$\lambda_1(\vec{x}_2^{\,*} \cdot \vec{x}_1) = \lambda_2(\vec{x}_2^{\,*} \cdot \vec{x}_1); \quad (\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{x}_2^{\,*} \cdot \vec{x}_1) = 0\,.$
Из 4: $\quad \vec{x}_2^{\,*} \cdot \vec{x}_1 = 0\,.$

Следствие. Собственные векторы всякой вещественной симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

3 Линейные и квадратичные формы (элементарная теория)

3.1 Линейные формы; основные понятия и определения

Пусть фиксировано числовое поле $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$.

3.1.1 Что такое форма

Форма — это однородный полином от нескольких переменных (понятие синтаксическое) с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$.

Линейная форма.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \qquad a_k \in \mathbb{F}.$$

Квадратичная (квадратическая) форма.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \ldots &+ c_{1n}x_1x_n + \\ + c_{22}x_2^2 + \ldots &+ c_{2n}x_2x_n + \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \\ &+ c_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

Кубическая форма.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j,k=1}^{n} c_{ijk}x_ix_jx_k.$$

3.1.2 Как принято записывать линейную форму

Линейную форму принято записывать либо в алгебраической форме с помощью знака суммирования, либо в матричной форме в виде произведения строки коэффициентов на столбец независимых переменных. При этом используются как конкретная покомпонентная запись, так и абстрактная матрично-векторная:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_kx_k = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$f(\vec{x}) = \vec{a}^\top \cdot \vec{x} \ .$$

Линейная форма вполне определяется матрицей-строкой своих коэффициентов. Между линейными формами и матрицами-строками существует взаимно однозначное соответствие.

3.1.3 Что произойдет с линейной формой, если сделать линейную замену переменных

Теорема. После линейной замены переменных линейная форма превратится в другую линейную форму.

Доказательство. Линейная замена переменных

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ \dots + b_{1n}y_n \\ x_2 & = & b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ \dots + b_{2n}y_n \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n & = & b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ \dots + b_{nn}y_n \end{array}\right.$$

может быть записана в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

и в абстрактной матричной форме:

$$\vec{x} = B\vec{y} \ .$$

При этом форма изменяется следующим образом:

$$\tilde{f}(\vec{y}) = f(B\vec{y}) = \vec{a}^\top \cdot B\vec{y} = (\vec{a}^\top B) \cdot \vec{y} = \tilde{\vec{a}}^\top \cdot \vec{y}.$$

Очевидно, что строка коэффициентов «новой» формы выражается линейно через строку коэффициентов «старой» формы с помощью матрицы, определяющей замену переменных, т.е. с помощью матрицы B :

$$\tilde{\vec{a}}^\top = \vec{a}^\top B \ .$$

3.1.4 Две и более последовательно выполненные замены переменных

Теорема. Две последовательно выполненные замены переменных

$$\vec{x} = B_1\vec{y}\,, \qquad \vec{y} = B_2\vec{z}$$

эквивалентны одной замене переменных

$$\vec{x} = B\vec{z}$$

с матрицей

$$B = B_1 \cdot B_2\,.$$

Доказательство. Самостоятельно.

3.1.5 Действия над линейными формами

Линейные формы (как и любые функции $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$) можно складывать и умножать на элементы поля $\mathbb{F}$.

Сложение двух линейных форм. Если заданы две линейные формы

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\,,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n\,,$$

то их сумма

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= (a_1+b_1)x_1 + (a_2+b_2)x_2 + \dots + (a_n+b_n)x_n\,.\end{aligned}$$

Мы видим, что строка коэффициентов суммы линейных форм равна сумме строк коэффициентов слагаемых линейных форм.

Умножение линейной формы на число. Если заданы форма и число

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \qquad \alpha \in \mathbb{F},$$

то их произведение

$$(\alpha f)(x_1, \dots, x_n) = \alpha f_1(x_1, \dots, x_n) = (\alpha a_1)x_1 + (\alpha a_2)x_2 + \dots + (\alpha a_n)x_n\,.$$

Мы видим, что строка коэффициентов произведения линейной формы на число равна произведению строки коэффициентов линейной формы на то же число.

Теорема. Между матрицами-строками и линейными формами существует не только взаимно однозначное соответствие, но и алгебраический изоморфизм.

Доказательство. Фактически уже содержится в двух предыдущих пунктах.

3.1.6 Основная задача элементарной теории линейных форм

Ввиду описанного изоморфизма понятно, что означают термины «ЛЗ система линейных форм», «ЛНЗ система линейных форм».

Постановка задачи. Для системы линейных форм

$$\begin{cases} f_1(\vec{x}) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ f_2(\vec{x}) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(\vec{x}) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

с матрицей строк

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

найти ЛНЗ формы системы и выразить все формы системы через эти ЛНЗ формы.

Редукция задачи. Найти ЛНЗ строки матрицы A и выразить все строки матрицы через эти ЛНЗ строки.

Решение задачи. Мы уже знаем, как решается эта задача.

1-й способ: к матрице $A^\top$ применяется элементарные строчечные преобразования (без перестановки столбцов).

2-й способ: к матрице A применяются элементарные столбцовые преобразования (без перестановки строк), в результате которых строки матрицы последовательно превращаются в строки единичной матрицы.

3.1.7 Канонический базис пространства линейных форм

В пространстве линейных форм n переменных существуют n ЛНЗ форм, через которые выражаются все линейные формы n переменных:

$$
\begin{aligned}
&e_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = x_1\,,\\
&e_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0x_1 + 1_2 + \dots + 0x_n = x_2\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 1x_k + \dots + 0x_n = x_k\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&e_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0_1 + 0x_2 + \dots + 1x_n = x_n\,.
\end{aligned}
$$

Замечание. Более глубокая теория линейных форм в рамках теории линейных функционалов в конечномерных линейных пространствах излагается в курсе линейной алгебры (3-й и 4-й семестры).

3.1.8 Примеры

Пример 1. Для трех форм трех переменных

$$
\begin{cases}
f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 3x_3\\
f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + 2x_3\\
f_3(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 + 7x_3
\end{cases}
$$

найти ЛНЗ формы и выразить все остальные через них.

Решение. Используем 1-й способ.

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}; \quad A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3\\ 0 & -2 & -4\\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Видим: 1-й и 2-й столбцы ЛНЗ, 3-й столбец равен первому + два вторых.

Ответ.

$$f_1, f_2 \text{ ЛНЗ формы}\,,$$

$$f_3 = f_1 + 2f_2\,.$$

Пример 2. Для пяти форм четырех переменных

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 4x_4 \\ f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ f_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + 7x_4 \\ f_5(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 17x_4 \end{cases}$$

найти ЛНЗ формы и выразить все остальные через них.

Решение. Используем 2-й способ.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & -17 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 8 & 15 & 12 & -51 \\ 3 & 5 & 4 & -17 \\ 2 & 5 & 4 & -17 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Видим:

– 4-я и 5-я строки ЛНЗ;

– 1-я строка равна восьми 4-м строкам плюс три 5-х;

– 2-я строка равна трем 4-м строкам плюс одна 5-я;

– 3-я строка равна двум 4-м строкам плюс одна 5-я.

Ответ.

$$f_4, f_5 \text{ ЛНЗ формы},$$

$$\begin{aligned} f_1 &= 8f_4 + 3f_5, \\ f_2 &= 3f_4 + 1f_5, \\ f_3 &= 2f_4 + 1f_5. \end{aligned}$$

3.2 Квадратичные формы; основные определения

Пусть фиксировано числовое поле $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$. Для нас далее будут особенно важны два случая: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{F} = \mathbb{C}$.

3.2.1 Что такое квадратичная форма

Определение. Квадратичная форма (КФ) — это однородный полином второй степени от нескольких переменных:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \,.$$

3.2.2 Как принято записывать квадратичную форму

КФ принято записывать с коэффициентами, образующими симметрическую матрицу:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad a_{ij} = a_{ji} \,.$$

Запись в конкретной матричной форме:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \,.$$

Запись в абстрактной матричной форме:

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^\top A \vec{x}, \qquad A = A^\top \,.$$

3.2.3 Что произойдет с квадратичной формой, если сделать линейную замену переменных

После линейной замены переменных в КФ она превратится в другую КФ от новых переменных. Действительно,

$$\vec{x} = B\vec{y} \,,$$

$$\tilde{f}(\vec{y}) = f(B\vec{y}) = (B\vec{y})^\top A (B\vec{y}) = \vec{y}^\top (B^\top A B)\vec{y} = \vec{y}^\top \tilde{A} \vec{y} \,,$$

где матрица новой КФ

$$\tilde{A} = B^\top A B \,.$$

Матрица $\tilde{A}$ вновь симметрическая, ибо

$$\tilde{A}^\top = (B^\top AB)^\top = B^\top A^\top B^{\top\top} = B^\top A^\top B = B^\top AB = \tilde{A} \,.$$

3.2.4 Две и более замен переменных в квадратичной форме

Две последовательно выполненные замены переменных

$$\vec{x} = B_1\vec{y}, \qquad \vec{y} = B_2\vec{z}$$

эквивалентны одной замене переменных

$$\vec{x} = B\vec{z}$$

с матрицей

$$B = B_1 \cdot B_2 \,.$$

При этом матрица квадратичной формы изменится так:

$$\tilde{A} = B_1^\top AB_1, \quad \tilde{\tilde{A}} = B_2^\top \tilde{A}B_2 = (B_1B_2)^\top A(B_1B_2) \,.$$

3.2.5 Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы

Положительно определенная КФ (положительная КФ).

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \qquad f(\vec{x}) > 0 \,.$$

Положительно полуопределенная КФ (неотрицательная КФ).

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \qquad f(\vec{x}) \geq 0 \,.$$

Отрицательно определенная КФ (отрицательная КФ).

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \qquad f(\vec{x}) < 0 \,.$$

Отрицательно полуопределенная КФ (неположительная КФ).

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \qquad f(\vec{x}) \leq 0 \,.$$

Неопределенная КФ (знакопеременная КФ).

$$\exists\, \vec{x}_1 \ \exists\, \vec{x}_2 \quad \begin{cases} f(\vec{x}_1) > 0 \\ f(\vec{x}_2) < 0 \end{cases} .$$

3.2.6 Инвариантность положительной определенности

Теорема. При линейной замене переменных неотрицательная КФ превращается в неотрицательную КФ.

Доказательство. Если $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad f(\vec{x}) \geq 0\,,$ то

$$\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad \tilde{f}(\vec{y}) = f(B\vec{y}) \geq 0\,.$$

Теорема. При невырожденной $(\det B \neq 0)$ линейной замене переменных положительная КФ превращается в положительную КФ.

Доказательство. Если $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \quad f(\vec{x}) > 0\,,$ то

$$\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad \tilde{f}(\vec{y}) = f(B\vec{y}) \geq 0\,.$$

Кроме того,

$$f(B\vec{y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad B\vec{y} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{y} = \vec{0}\,,$$

и поэтому

$$\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \qquad \tilde{f}(\vec{y}) > 0\,.$$

3.3 Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному видам

3.3.1 Лемма 1

Если в КФ f коэффициент $a_{11} = 0$, но $\exists k \quad a_{kk} \neq 0$, то можно сделать линейную невырожденную замену переменных $\vec{x} = B\vec{y}$, после которой в новой КФ $\tilde{a}_{11} \neq 0$.

Вот эта замена (по сути это просто перенумерация переменных):

$$\begin{cases} x_1 = y_k \\ x_2 = y_2 \\ \dots\dots \\ x_{k-1} = y_{k-1} \\ x_k = y_1 \\ x_{k+1} = y_{k+1} \\ \dots\dots \\ x_n = y_n \end{cases} \qquad \vec{x} = E(1 \leftrightarrow k)\vec{y};$$

в развернутой матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
0 & & & & & 1 & & & \\
& 1 & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & \\
& & & \ddots & & & & & \\
& & & & 1 & & & & \\
1 & & & & & 0_{kk} & & & \\
& & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 1
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} .$$

Матрица новой квадратичной формы

$$\tilde{A} = \underbrace{\underbrace{E(1 \leftrightarrow k) \quad \cdot \quad A}_{\substack{\text{меняются местами} \\ \text{строки } 1,k}} \quad \cdot \quad E(1 \leftrightarrow k)}_{\substack{\text{потом меняются местами} \\ \text{столбцы } 1,k}}$$

3.3.2 Лемма 2

Если $\forall j \quad a_{jj} = 0$, но $\exists i, k \quad a_{ik} \neq 0$, то можно сделать невырожденную линейную замену переменных $\vec{x} = B\vec{y}$, $\det B \neq 0$, после которой

$$\tilde{a}_{kk} \neq 0.$$

Вот эта замена и обратная к ней:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_i = y_i + y_k \\ \dots\dots\dots \\ x_k = y_k \\ \dots\dots\dots \\ x_n = y_n \end{cases} \qquad \qquad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_i = x_i - x_k \\ \dots\dots\dots \\ y_k = x_k \\ \dots\dots\dots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

$$\vec{x} = E \begin{pmatrix} i & i+k \\ & k \end{pmatrix} \cdot \vec{y} \qquad \qquad \vec{y} = E \begin{pmatrix} i & i-k \\ & k \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Если распишем матрицу $E\begin{pmatrix} i & i+k \\ & k \end{pmatrix}$ [19, с. 108]:

$$
E\begin{pmatrix} i & i+k \\ & k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1_{ii} & & 1_{ik} & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & \ddots & & \\
& & & & 1_{kk} & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1_{nn}
\end{bmatrix},
$$

то легко найдем транспонированную:

$$
E\begin{pmatrix} i & i+k \\ & k \end{pmatrix}^{\top} = E\begin{pmatrix} k & k+i \\ & i \end{pmatrix}.
$$

Матрица новой формы:

$$
\tilde{A} = \underbrace{\underbrace{E\begin{pmatrix} k & k+i \\ & i \end{pmatrix} \cdot A}_{\substack{\text{к } k\text{-й строке} \\ \text{прибавляется } i\text{-я строка}}} \cdot E\begin{pmatrix} i & i+k \\ & k \end{pmatrix}}_{\text{к } k\text{-му столбцу прибавляется } i\text{-й столбец}}.
$$

Вот последовательность матриц, фиксирующая соответствующие преобразования:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{k1}+a_{i1}) & \dots & (a_{ki}+a_{ii}) & \dots & (a_{kk}+a_{ik}) & \dots & (a_{kn}+a_{in}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & (a_{1k}+a_{1i}) & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & (a_{ik}+a_{ii}) & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{k1}+a_{i1}) & \dots & (a_{ki}+a_{ii}) & \dots & (a_{kk}+2a_{ik}+a_{ii}) & \dots & (a_{kn}+a_{in}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & (a_{nk}+a_{ni}) & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a}_{kk} = (a_{kk} + 2a_{ik} + a_{ii}) = 2a_{ik} \neq 0\,.$$

Практический прием. Делается реальная замена переменных, раскрываются скобки и приводятся подобные слагаемые.

Пример. Рассмотрим КФ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + 4x_1x_2 - x_2x_3$. В этой форме все $a_{jj} = 0$, но $a_{12} = a_{21} = 2 \neq 0$. Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 + y_1 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \qquad (i = 2,\ k = 1)\,.$$

Новая форма получается в результате реальной замены переменных:

$$\tilde{f}(y_1, y_2, y_3) = y_1y_3 + 4y_1(y_2 + y_1) - (y_2 + y_1)y_3 = 4y_1^2 + 4y_1y_2 - y_2y_3.$$

Матрица этой формы $\quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

Решим эту же задачу согласно изложенной теории в три действия:

- выпишем исходную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix};$$

- к 1-й строке прибавим 2-ю строку:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix};$$

- к 1-у столбцу прибавим 2-й столбец:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Результаты вычислений совпали — и это естественно.

3.3.3 Лемма 3

Если форма не нулевая, т.е. если $\exists ik \quad a_{ik} \neq 0$, то можно сделать линейную невырожденную замену переменных $\vec{x} = B\vec{y}$, $\det B \neq 0$, после которой

$$\tilde{\tilde{f}}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \tilde{\tilde{a}}_{11} z_1^2 + \tilde{\tilde{\varphi}}(z_2, z_3, \ldots, z_n),$$

где $\tilde{\tilde{\varphi}}$ — это квадратичная форма $(n-1)$-й переменной. Другими словами: матрица $\tilde{A}$ квадратичной формы будет иметь следующий вид:

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} \tilde{\tilde{a}}_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & & \\ \vdots & & & * & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right], \qquad \tilde{\tilde{a}}_{11} \neq 0.$$

Действительно, рассмотрим исходную форму и, опираясь на леммы 1, 2, сделаем невырожденную замену переменных так, чтобы $\tilde{a}_{11} \neq 0$; получим форму

$$\tilde{f}(\vec{y}) = \tilde{a}_{11} y_1^2 + 2\tilde{a}_{12} y_1 y_2 + 2\tilde{a}_{13} y_1 y_3 + \ldots + 2\tilde{a}_{1n} y_1 y_n + \tilde{\varphi}(y_2, y_3, \ldots, y_n) =^*$$

вынесем за скобку $\tilde{a}_{11}$,

$$=^{*}\ \tilde{a}_{11}\left(y_1^2+2y_1\underbrace{\left(\frac{\tilde{a}_{12}}{\tilde{a}_{11}}y_2+\frac{\tilde{a}_{13}}{\tilde{a}_{11}}y_3+\,\dots\,+\frac{\tilde{a}_{1n}}{\tilde{a}_{11}}y_n\right)}_{l(y_2,y_3,\,\dots\,,y_n)}\right)+\tilde{\varphi}(y_2,y_3,\,\dots\,,y_n)=^{**}$$

выделим полный квадрат в первом слагаемом и компенсируем дополнительное слагаемое,

$$=^{**}\ \tilde{a}_{11}\left(y_1+l(y_2,y_3,\,\dots\,,y_n)\right)^2+\tilde{\varphi}(y_2,y_3,\,\dots\,,y_n)-\tilde{a}_{11}l^2(y_2,y_3,\,\dots\,,y_n)\,.$$

Сделаем невырожденную замену переменных:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1=y_1+l(y_2,y_3,\,\dots\,,y_n)\\ z_k=y_k,\quad k=2,3,\,\dots\,,n\end{array}\right. \quad\sim\quad \left\{\begin{array}{l} y_1=z_1-l(z_2,z_3,\,\dots\,,z_n)\\ y_k=z_k,\quad k=2,3,\,\dots\,,n\end{array}\right.,$$

получим форму

$$\tilde{\tilde{f}}\ (z_1,z_2,\,\dots\,,z_n)=\underbrace{\tilde{\tilde{a}}_{11}\cdot}_{=\tilde{a}_{11}}z_1^2+\tilde{\tilde{\varphi}}(z_2,z_3,\,\dots\,,z_n)\,.$$

Пример.
$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_3-6x_2x_3+x_3^2=(2x_1^2+4x_1x_3)+(-6x_2x_3+x_3^2)=$
$=2(x_1^2+2x_1x_3)+(-6x_2x_3+x_3^2)=2(x_1+x_3)^2+(-6x_2x_3+x_3^2-2x_3^2).$

Делаем замену старых переменных (обратная замена):

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_3=z_1\\ x_2=z_2\\ x_3=z_3\end{array}\right.,$$

выражаем старые переменные через новые (прямая замена):

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=z_1-z_3\\ x_2=z_2\\ x_3=z_3\end{array}\right..$$

Завершаем вычисления:

$$\tilde{f}(z_1,z_2,z_3)=2z_1^2+(-6z_2z_3-z_3^2)\,,$$

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -3\\ 0 & -3 & -1\end{array}\right].$$

3.3.4 Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду

Теорема-определение. Для любой квадратичной формы над числовым полем $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

можно сделать линейную невырожденную замену переменных, после которой вновь полученная форма $\tilde{f}$ опять будет формой над $\mathbb{F}$ и будет состоять только из квадратов переменных с некоторыми коэффициентами, причем все ненулевые коэффициенты будут предшествовать всем нулевым:

$$\tilde{f}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = a_{11} z_1^2 + a_{22} z_2^2 + \ldots + a_{rr} z_r^2 + 0 z_{r+1}^2 + \ldots + 0 z_n^2 .$$

Матрица квадратичной формы будет при этом диагональной с нулевыми элементами, расположенными в нижних позициях диагонали.

Вновь полученная квадратичная форма называется **каноническим видом** исходной квадратичной формы.

Доказательство. Проводится методом математической индукции по числу переменных.

База индукции. $n = 1$. $f(x_1) = a_{11} x_1^2$; форма уже находится в каноническом виде.

Индукционный переход. Пусть теорема справедлива для всех форм от $(n-1)$ переменных.

Рассмотрим произвольную форму от n переменных:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Если $\forall ij \quad a_{ij} = 0$, то теорема доказана.

Если $\exists a_{ij} \neq 0$, то согласно леммам 1, 2, 3 найдется невырожденная линейная замена переменных, после которой матрица формы будет выглядеть так:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{a}_{11} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A}_{11} \end{array} \right],$$

а квадратичная форма так:

$$\tilde{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \tilde{a}_{11}^2 y_1^2 + \tilde{\varphi}(y_2, y_3, \ldots, y_n),$$

где $\tilde{a}_{11} \neq 0$.

Согласно индукционному предположению, с помощью невырожденной замены переменных

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

квадратичная форма $\tilde{\varphi}$ может быть приведена к каноническому виду

$$\tilde{\varphi}(z_2, \ldots, z_n) = \tilde{\tilde{a}}_{22} z_2^2 + \ldots + \tilde{\tilde{a}}_{rr} z_n^r + 0 z_{r+1}^2 + \ldots + 0 z_n^2;$$

но тогда замена переменных

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y_1 & = & z_1 \\ \begin{bmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} & = & B \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

с невырожденной матрицей

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right]$$

приводит форму $\tilde{f}$ к каноническому виду

$$\tilde{\tilde{f}}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \tilde{a}_{11} z_1^2 + \tilde{\tilde{a}}_{22} z_2^2 + \ldots + \tilde{\tilde{a}}_{rr} z_r^2 + 0 z_{r+1}^2 + \ldots + 0 z_n^2.$$

Замечание 1. В последней формуле нет опечатки: перед z_1^2 действительно стоит коэффициент $\tilde{a}_{11}$, наследуемый из первого преобразования.

Замечание 2. Коэффициенты канонического вида КФ принадлежат тому же числовому полю, что и коэффициенты исходной формы, т.к. получаются из них с помощью четырех арифметических действий.

3.3.5 Матричный эквивалент теоремы о приведении квадратичной формы к каноническому виду

Теорема. Для всякой симметрической матрицы A $(A = A^\top)$ существует невырожденная матрица B $(\det B \neq 0)$, такая, что

$$B^\top A B = \mathrm{diag}(\tilde{\tilde{a}}_{11}, \tilde{\tilde{a}}_{22}, \ldots, \tilde{\tilde{a}}_{rr}, 0, \ldots, 0).$$

3.3.6 Пример приведения КФ к каноническому виду

Предварительное замечание. Будем решать задачу приведения КФ к каноническому виду очень (даже излишне) подробно,чтобы в подробностях увидеть каждый шаг решения. На практических занятиях студенты сами научаются (очень и очень быстро) избегать ненужных на практике подробностей:

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+4x_1x_4+x_2^2+6x_2x_4+x_3^2-4x_3x_4+4x_4^2 = \\
&= x_1^2+2x_1(x_2-x_3+2x_4)+x_2^2+6x_2x_4+x_3^2-4x_3x_4+4x_4^2 = \\
&= [x_1^2+2x_1(x_2-x_3+2x_4)+(x_2-x_3+2x_4)^2]+ \\
&\qquad + x_2^2+6x_2x_4+x_3^2-4x_3x_4+4x_4^2 - \\
&\qquad\qquad -(x_2^2+x_3^2+4x_4^2-2x_2x_3+4x_2x_4-4x_3x_4) = \\
&= [x_1+(x_2-x_3+2x_4)]^2+2x_2x_3+2x_2x_4\,.
\end{aligned}$$

Вводим новые переменные, выражаем старые через новые, выписываем матрицу перехода:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = x_1+x_2-x_3+2x_4 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ y_4 = x_4 \end{array}\right. ,\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = y_1-y_2+y_3-2y_4 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{array}\right. ,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате переменная y_1 входит только в единственное квадратичное слагаемое:

$$\tilde{f}(y_1,y_2,y_3,y_4) = y_1^2 + \underbrace{2y_2y_3+2y_2y_4}_{\varphi(y_2,y_3,y_4)}\,.$$

Коэффициенты $a_{23}=a_{32}\neq 0$.

Далее нужно получить $a_{22}\neq 0$. Для этого сделаем замену переменных, рекомендуемую теорией:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3+z_2 \\ y_4 = z_4 \end{array}\right. ;\ \text{матрица перехода } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате замены

$$\tilde{\tilde{f}}(z_1,z_2,z_3,z_4) = z_1^2+2z_2(z_2+z_3)+2z_2z_4 =$$

$$= z_1^2 + 2z_2^2 + 2z_2z_3 + 2z_2z_4 =$$
$$= z_1^2 + 2(z_2 + 1/2(z_3 + z_4))^2 - 1/4(z_3^2 + 2z_3z_4 + z_4^2)\,.$$

Полный квадрат уже выделен. Вводим новые переменные, выражаем старые через новые, выписываем матрицу перехода:

$$\begin{cases} v_1 = z_1 \\ v_2 = z_2 + 1/2z_3 + 1/2z_4 \\ v_3 = z_3 \\ v_4 = z_4 \end{cases}, \qquad \begin{cases} z_1 = v_1 \\ z_2 = v_2 - 1/2v_3 - 1/2v_4 \\ z_3 = v_3 \\ z_4 = v_4 \end{cases},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате

$$\begin{aligned} f^+(v_1, v_2, v_3, v_4) &= v_1^2 + 2v_2^2 - 0.25v_3^2 - 0.5v_3v_4 - 0.25v_4^2 = \\ &= v_1^2 + 2v_2^2 - 0.25(v_3^2 + 2v_3v_4 + v_4^2) = \\ &= v_1^2 + 2v_2^2 - 0.25(v_3 + v_4)^2\,. \end{aligned}$$

Последний раз вводим новые переменные, выражаем старые через новые, выписываем матрицу перехода:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 + v_4 \\ u_4 = v_4 \end{cases}, \qquad \begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 \\ v_3 = u_3 - u_4 \\ v_4 = u_4 \end{cases}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вот канонический вид КФ:

$$\tilde{f}^+(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1^2 + 2u_2^2 - \frac{1}{4}u_3^2 + 0u_4^2\,.$$

Результирующая замена переменных $\vec{x} = B \cdot \vec{u}$ осуществляется с матрицей $B = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4 =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + u_3 - 3u_4 \\ x_2 = u_2 - 0.5u_3 \\ x_3 = u_2 + 0.5u_3 - u_4 \\ x_4 = u_4 \end{cases}.$$

Найдем матрицу обратного преобразования, т.е. матрицу B^{-1}, известным нам методом.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Теперь легко записать выражение «канонических» переменных через исходные:

$$\begin{cases} u_1 = x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ u_2 = 0.5x_2 + 0.5x_3 + 0.5x_4 \\ u_3 = -x_2 - x_3 + 2x_4 \\ u_4 = x_4 \end{cases}.$$

3.3.7 Приведение квадратичной формы к нормальному виду над полем $\mathbb{C}$

В квадратичной форме над полем $\mathbb{C}$, записанной в каноническом виде

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = a_{11}z_1^2 + a_{22}z_2^2 + \ldots + a_{rr}z_r^2 + 0z_{r+1}^2 + \ldots + 0z_n^2,$$

можно сделать еще одну невырожденную замену переменных, полагая

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a_{11}}}u_1 \\ z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a_{22}}}u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_r = \dfrac{1}{\sqrt{a_{rr}}}u_r \\ \\ z_{r+1} = u_{r+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = u_n \end{cases}.$$

Теперь новая КФ имеет вид

$$\tilde{f}(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_r^2, \qquad r \le n\,;$$

это **нормальный вид** КФ над полем $\mathbb{C}$.

Матрица этой формы такова:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1_{rr} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0_{nn} \end{bmatrix}.$$

3.3.8 Приведение квадратичной формы к нормальному виду над полем $\mathbb{R}$

Если в каноническом виде формы над полем $\mathbb{R}$

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = a_{11}z_1^2 + a_{22}z_2^2 + \dots + a_{rr}z_r^2 + 0z_{r+1}^2 + \dots + 0z_n^2$$

сделать перенумерацию переменных, взяв в качестве меньших номеров те, для которых $a_{kk} > 0$, а в качестве больших те, для которых $a_{kk} < 0$, то получим форму

$$\tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = a_{11}v_1^2 + \dots + a_{mm}v_m^2 - a_{(m+1)(m+1)}v_{m+1}^2 - \dots - a_{rr}v_r^2 + 0 + \dots + 0\,.$$

Теперь можно сделать еще одну невырожденную замену переменных, полагая

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a_{11}}}u_1 \\ z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a_{22}}}u_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_r = \dfrac{1}{\sqrt{a_{rr}}}u_r \\ \\ z_{r+1} = u_{r+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_n = u_n, \end{cases}.$$

Новая КФ имеет вид

$$\tilde{f}(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2 - u_{m+1}^2 - \dots - u_r^2\,;$$

это **нормальный вид** КФ над полем $\mathbb{R}$.

Матрица этой формы такова:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1_{mm} & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1_{rr} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0_{nn} \end{bmatrix}.$$

3.4 Ранг произведения матриц; ранг квадратичной формы

3.4.1 Оценки ранга произведения двух матриц

Теорема. Ранг произведения двух матриц не больше ранга каждого из сомножителей. Формально:

$$\operatorname{rang} AB \le \operatorname{rang} A, \qquad \operatorname{rang} AB \le \operatorname{rang} B\,.$$

Доказательство. Пусть $C_{m\times k} = A_{m\times n}B_{n\times k}$, или в развернутой форме:

$$[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_n]\cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nk} \end{bmatrix} = [\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \ldots\ \vec{c}_k]\,.$$

В постолбцовой записи (читая справа налево):

$$\vec{c}_j = \vec{a}_1 b_{1j} + \vec{a}_2 b_{2j} + \vec{a}_3 b_{3j} + \ldots + \vec{a}_n b_{nj}.$$

Мы видим: каждый столбец произведения двух матриц есть линейная комбинация столбцов первого сомножителя.

Если к матрице $[\,A \mid C\,] = [\,\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\ldots\,\vec{c}_n \mid \vec{c}_1\,\vec{a}_2\,\ldots\,\vec{c}_k\,]$ применить упрощения 1-й и 2-й ступеней (без перестановки столбцов), то в ее блочной записи

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & * \\ a_{r1} & \ldots & a_{rn} & \\ \hline & 0 & & C_{22} \end{array}\right]$$

блок $C_{22} = O$ (нулевой), т.к. правые столбцы суть линейные комбинации левых, т.е.

$$\operatorname{rang} C \leq \operatorname{rang} A\,.$$

Пусть теперь $C_{m\times k} = A_{m\times n}B_{n\times k}$, или в развернутой форме:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{b}_{1\cdot} \\ \vec{b}_{2\cdot} \\ \dots \\ \vec{b}_{n\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{c}_{1\cdot} \\ \vec{c}_{2\cdot} \\ \dots \\ \vec{c}_{m\cdot} \end{bmatrix}.$$

В построчной записи:

$$\vec{c}_{j\cdot} = a_{j1}\vec{b}_{1\cdot} + a_{j2}\vec{b}_{2\cdot} + \dots + a_{jn}\vec{b}_{n\cdot}\,.$$

Мы видим: каждая строка произведения двух матриц есть линейная комбинация строк второго сомножителя, следовательно

$$\operatorname{rang} C \leq \operatorname{rang} B.$$

3.4.2 Формула ранга произведения двух матриц

Теорема. Ранг произведения двух матриц, один из сомножителей которого невырожденный, совпадает с рангом второго сомножителя. Формально:

$$\det B \neq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} A \\ \operatorname{rang} BC = \operatorname{rang} C \end{cases}.$$

Доказательство. Мы знаем, что

$$\operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} A,$$

с другой стороны, $A = (AB)B^{-1}$, и потому

$$\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} AB,$$

следовательно,

$$\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} A\,.$$

Мы знаем, что

$$\operatorname{rang} BC \leq \operatorname{rang} C,$$

с другой стороны, $C = B^{-1}(BC)$, и потому

$$\operatorname{rang} C \leq \operatorname{rang} BC,$$

следовательно,

$$\operatorname{rang} BC = \operatorname{rang} C.$$

3.4.3 Ранг матрицы квадратичной формы; ранг квадратичной формы

Теорема. Ранг матрицы квадратичной формы не меняется при невырожденной замене переменных.

Редукция.

$$\det B \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rang}(B^\top AB) = \operatorname{rang} A\,.$$

Доказательство. Оно почти очевидно, т.к.

$$\text{если } \det B \neq 0, \text{ то и } \det B^\top \neq 0\,,$$

а поэтому

$$\operatorname{rang}(B^\top(AB)) = \operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} A\,.$$

Следствие. После приведения формы к каноническому виду

$$\operatorname{rang}\tilde{A} = \operatorname{rang}\operatorname{diag}(\tilde{a}_{11}\ \tilde{a}_{22}\ \ldots\ \tilde{a}_{nn}) =$$

$$= \text{ числу ненулевых элементов диагонали матрицы КФ.}$$

Определение. Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы. (Корректность определения обеспечена доказанной теоремой.)

Следствие. Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{C}$ вполне определяется числом r — рангом квадратичной формы.

Пример. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = 10x_1x_3 + (4+6i)x_2x_3$ имеет матрицу $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & (2+3i) \\ 5 & (2+3i) & 0 \end{bmatrix}$, ранг которой $\operatorname{rang} A = 2$, поэтому ее нормальный вид $\tilde{f}(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2$.

Гипотеза. Можно предположить, что нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$ вполне определяется двумя числами: m, $r \geq m$. Число m — т.н. положительный индекс инерции КФ;

$$0 \leq m \leq r \leq n.$$

(Доказательство составляет содержание следующего вопроса.)

3.5 Закон инерции квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$

3.5.1 Определение и доказательство закона инерции КФ

Теорема-определение. Пусть некоторая КФ над полем $\mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

с помощью двух невырожденных замен переменных

$$\vec{x} = B\vec{y}, \qquad \vec{x} = D\vec{z},$$

приводится к двум нормальным видам:

$$\begin{array}{rcl} f(B\vec{y}) & = & y_1^2 + \ldots + \vec{y}_{m^2} - y_{m+1}^2 - \ldots - y_r^2, \\ f(B\vec{z}) & = & z_1^2 + \ldots + \vec{z}_{p^2} - z_{p+1}^2 - \ldots - z_r^2, \end{array}$$

тогда $m = p$ — это **закон инерции квадратичной формы.**

Доказательство. Предположим противное: $m < p$ $(m - p < 0)$. Рассмотрим множество переменных следующих типов:

$$\vec{y}_o = \left[\begin{array}{c} 0_1 \\ \vdots \\ 0_m \\ \hline y_{m+1} \\ \vdots \\ y_p \\ \hline y_{p+1} \\ \vdots \\ y_n \end{array} \right], \qquad \vec{z}_o = \left[\begin{array}{c} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ \hline z_{m+1} \\ \vdots \\ z_p \\ \hline 0_{p+1} \\ \vdots \\ 0_n \end{array} \right].$$

Для этих типов переменных

$$f(B\vec{y}_o) = -y_{m+1}^2 - \ldots - y_n^2,$$

$$f(D\vec{z}_o) = z_1^2 + \ldots + z_m^2 + \ldots + z_p^2.$$

Можно найти ненулевой вектор-столбец $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, для которого найдутся векторы $\vec{y}_{o1}$, $\vec{z}_{o1}$ указанных типов, такие, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_1 = B\vec{y}_{o1} \\ \vec{x}_1 = D\vec{z}_{o1} \end{array} \right. . \qquad (*)$$

Найдем такой вектор. Для этого обратим $(*)$:

$$\begin{cases} \vec{y}_{o1} = F\vec{x}_1 \\ \vec{z}_{o1} = G\vec{x}_1 \end{cases} . \qquad (**)$$

Запишем $(**)$ в покомпонентной форме, приравнивая некоторые выражения нулю в соответствии с требуемыми типами (значения прочих выражений получатся после подстановки в них искомых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$):

$$\begin{cases} y_1 & \equiv & f_{11}x_1 + \ldots\ldots + f_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ y_m & \equiv & f_{m1}x_1 + \ldots\ldots + f_{mn}x_n & = & 0 \\ y_{m+1} & \equiv & f_{(m+1)1}x_1 + \ldots + f_{(m+1)n}x_n; & & \\ \vdots & & & & \\ y_n & \equiv & f_{n1}x_1 + \ldots + f_{nn}x_n; & & \\ z_1 & \equiv & g_{11}x_1 + \ldots + g_{1n}x_n; & & \\ \vdots & & & & \\ z_p & \equiv & g_{p1}x_1 + \ldots + g_{pn}x_n; & & \\ z_{p+1} & \equiv & g_{(p+1)}x_1 + \ldots\ldots + g_{(p+1)n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ z_n & \equiv & g_{n1}x_1 + \ldots\ldots + g_{nn}x_n & = & 0 \end{cases} .$$

Проанализируем систему

$$\begin{cases} f_{11}x_1 \ + \ldots\ldots + \ f_{1n}x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ f_{m1}x_1 \ + \ldots\ldots + \ f_{mn}x_n & = & 0 \\ g_{(p+1)}x_1 + \ldots + g_{(p+1)n}x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ g_{n1}x_1 \ + \ldots\ldots + \ g_{nn}x_n & = & 0 \end{cases} .$$

Она имéет ненулевое решение $\vec{x}_1$, т.к. это однородная линейная система, число уравнений которой меньше числа неизвестных:

$$m + (n - p) = n + (m - p) < n .$$

Подставив вектор $\vec{x}_1$ в уравнения $(**)$, получим ненулевые векторы требуемых типов. Система неравенств

$$\begin{cases} f(\vec{x}_1) = f(B\vec{y}_{o1}) = -y_{m+1}^2 - \ldots - y_r^2 < 0 \\ f(\vec{x}_1) = f(D\vec{z}_{o1}) = z_1^2 + \ldots + z_p^2 > 0 \end{cases}$$

противоречива.

Противоречие получено, и, следовательно, $p \geq m$. Но точно так же можно показать, что $p \leq m$, поэтому

$$p = m.$$

3.5.2 Закон инерции КФ как теорема единственности

Нормальный вид любой КФ над полем $\mathbb{R}$ однозначно определяется натуральными числами m, r:

m — положительный индекс квадратичной формы,

r — ранг квадратичной формы.

3.6 LDR-разложение

3.6.1 Угловые субматрицы и угловые миноры

Для матрицы

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

угловые субматрицы суть

$$A_k = (a_{ij})_{k\times k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots, n\,.$$

Угловые миноры $M_k = \det A_k, \quad M_n = \det A = \Delta$, в частности,

$$M_1 = a_{11}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и т.д.}$$

3.6.2 LDR-разложение

Определение. LDR-разложением квадратной матрицы A называется ее представление в виде произведения трех матриц: $A = L \cdot D \cdot R$, где

L — левая унитреугольная матрица,

D — диагональная матрица,

R — правая унитреугольная матрица.

3.6.3 Критерий LDR-разложимости

Для LDR-разложимости невырожденной матрицы необходимо и достаточно, чтобы все угловые субматрицы были невырожденными (все угловые миноры были отличны от нуля).

Доказательство необходимости. Пусть $A = LDR$, где

$$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \,\ldots\, , d_n)\,,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & l_{ij} & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & r_{ij} & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Запишем угловые субматрицы для $k = 1, 2, \,\ldots\, , n$:

$$D_k = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \,\ldots\, , d_k)\,,$$

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & l_{ij} & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{k\times k}, \qquad R_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & r_{ij} & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{k\times k}.$$

Имеют место понятные соотношения:

$$A_k = L_k D_k R_k\,,$$

$$\det A = \det L \cdot \det D \cdot \det R = \det D = \prod_{i=1}^{n} d_n \neq 0\,,$$

поэтому

$$\det A_k = \det L_k \cdot \det D_k \cdot \det R_k = \det D_k = \prod_{i=1}^{k} d_k \neq 0\,,$$

т.е. все угловые субматрицы A_k невырожденные.

Доказательство достаточности. Пусть все угловые субматрицы являются невырожденными. Покажем возможность LDR-разложения методом математической индукции по параметру k.

Неизвестные числа при первом их появлении в выражениях для наглядности индексируем сверху звездочкой.

База индукции. $k = 1$. $A_1 = [1] \cdot [a_{11}] \cdot [1]$.
Разложение существует и единственно.

Расширение базы индукции. $k = 2$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21}^* & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1^* & 0 \\ 0 & d_2^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & r_{12}^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} d_1 & 0 \\ \hline l_{21}d_1 & d_2 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} d_1 & d_1 r_{12} \\ \hline l_{21}d_1 & l_{21}d_1 r_{12} + d_2 \end{array}\right].$$

Ищем последовательно, одно за другим, неизвестные числа:

$d_1 = a_{11} \neq 0$,

$l_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}, \quad r_{12} = \dfrac{a_{12}}{a_{11}}$,

$d_2 = a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{11} \dfrac{a_{12}}{a_{11}} = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} \neq 0$.

Все искомые числа однозначно определились по матрице A.

Разложение существует и единственно.

Расширение базы индукции. $k = 3$.

$$A_3 = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ \hline l_{31}^* & l_{32}^* & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & d_3^* \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & r_{12} & r_{13}^* \\ 0 & 1 & r_{23}^* \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_2 & 0 \\ \hline \vec{l} & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} D_2 & 0 \\ \hline 0 & d_3 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} R_2 & \vec{r} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_2 D_2 & 0 \\ \hline \vec{l} D_2 & d_3 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} R_2 & \vec{r} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_2 D_2 R_2 & L_2 D_2 \vec{r} \\ \hline \vec{l} D_2 R_2 & \vec{l} D_2 \vec{r} + d_3 \end{array}\right].$$

$A_2 = L_2 D_2 R_2$ — это следует из предыдущего пункта.

Ищем последовательно, одно за другим, неизвестные числа:

$(L_2 D_2)\vec{r} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{r} = D_2^{-1} L_2^{-1} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$,

$[a_{31}\ a_{32}] = \vec{l} D_2 R_2 \Longrightarrow \vec{l} = [a_{31}\ a_{32}] R_2^{-1} D_2^{-1}$,

$a_{33} = \vec{l} D_2 \vec{r} + d_3 \Longrightarrow d_3 = a_{33} - \vec{l} D_2 \vec{r}$.

Все искомые числа однозначно определились по матрице A.

$d_3 \neq 0$, т.к. все произведение $(d_1 d_2 d_3) = \det A_3 \neq 0$.

Разложение существует и единственно.

Расширение базы индукции. $k = 4$.

$$A_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ \hline l_{41}^* & l_{42}^* & l_{43}^* & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d_4^* \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14}^* \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24}^* \\ 0 & 0 & 1 & r_{31}^* \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_3 & 0 \\ \hline \vec{l} & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} D_3 & 0 \\ \hline 0 & d_4^* \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} R_3 & \vec{r} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_3 D_2 & 0 \\ \hline \vec{l} D_3 & d_3 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} R_3 & \vec{r} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_3 D_3 R_3 & L_3 D_3 \vec{r} \\ \hline \vec{l} D_3 R_3 & \vec{l} D_3 \vec{r} + d_4 \end{array}\right].$$

$A_3 = L_3 D_3 R_3$ — это следует из предыдущего пункта.
Ищем последовательно, один за другим, неизвестные числовые векторы:

$$(L_3 D_3)\vec{r} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{r} = D_3^{-1} L_3^{-1} \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix},$$

$[a_{41}\ a_{42}\ a_{43}] = \vec{l} D_3 R_3 \Longrightarrow \vec{l} = [a_{41}\ a_{42}\ a_{43}] R_3^{-1} D_3^{-1}$,
$a_{44} = \vec{l} D_3 \vec{r} + d_4 \Longrightarrow d_4 = a_{44} - \vec{l} D_3 \vec{r}$.

Все искомые числовые векторы однозначно определились по матрице A.

$d_4 \neq 0$, т.к. все произведение $(d_1 d_2 d_3 d_4) = \det A_2 \neq 0$.

Разложение существует и единственно.

Индукционный переход. $k \longrightarrow (k+1)$. Пусть доказываемая теорема верна для всех невырожденных матриц порядка k (такие значения параметра k, как мы убедились, существуют). Рассмотрим матрицу порядка на единицу больше и ее предполагаемое LDR-разложение:

$$A_{k+1} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1k+1} \\ & A_k & & \vdots \\ & & & a_{k\,k+1} \\ \hline a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_k & \vec{0} \\ \hline \vec{l}^* & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} D_k & \vec{0} \\ \hline \vec{0} & d^*_{k+1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} R_k & \vec{r}^* \\ \hline \vec{0} & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_k D_k & \vec{0} \\ \hline \vec{l} D_k & d_{k+1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} R_k & \vec{r} \\ \hline \vec{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_k D_k R_k & L_k D_k \vec{r} \\ \hline \vec{l} D_k R_k & \vec{l} D_k \vec{r} + d_{k+1} \end{array}\right].$$

$A_k = L_k D_k R_k$ — это следует из индукционного предположения.

Ищем последовательно, один за другим, неизвестные числовые векторы:

$$(L_k D_k)\vec{r} = \begin{bmatrix} a_{1k+1} \\ a_{2k+1} \\ \vdots \\ a_{k\,k+1} \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{r} = D_k^{-1} L_k^{-1} \begin{bmatrix} a_{1\,k+1} \\ a_{2\,k+1} \\ \vdots \\ a_{k\,k+1} \end{bmatrix},$$

$[a_{k+1,1}\ a_{k+1,2}\ \dots\ a_{k+1,k}] = \vec{l} D_k R_k \Rightarrow \vec{l} = [a_{k+1,1}\ a_{k+1,2}\ \dots\ a_{k+1,k}] R_k^{-1} D_k^{-1}$,
$a_{k+1,k+1} = \vec{l} D_k \vec{r} + d_{k+1,k+1} \Rightarrow d_{k+1} = a_{k+1,k+1} - \vec{l} D_k \vec{r}$.

Все искомые числовые векторы однозначно определились по матрице A.

$d_{k+1} \neq 0$, т.к. все произведение $(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \ldots \cdot d_{k+1}) = \det A_{k+1} \neq 0$.

Таким образом, LDR-разложение для матриц порядка $(k+1)$ существует и единственно.

3.6.4 Выражение элементов диагональной матрицы LDR-разложения через угловые миноры

Для дальнейшего изложения и для приложений нам будут важны следующие формулы:

$$\begin{array}{ll} M_1 = \det D_1 = d_1, & d_1 = M_1; \\ M_2 = \det D_1 \cdot d_2 = M_1 \cdot d_2, & d_2 = \dfrac{M_2}{M_1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ M_{k+1} = \det D_k \cdot d_{k+1} = M_k \cdot d_{k+1}, & d_{k+1} = \dfrac{M_{k+1}}{M_k}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ M_n = \det D_{n-1} \cdot d_n = M_{n-1} \cdot d_n, & d_n = \dfrac{M_n}{M_{n-1}}. \end{array}$$

3.6.5 LDR-разложение симметрической матрицы

Вспомним, что транспонированная левая унитреугольная матрица является правой унитреугольной, и наоборот:

$$R^\top = \hat{L}, \qquad L^\top = \hat{R}\,.$$

Пусть матрица A симметрическая, т.е. $A = A^\top$, тогда

$$A = LDR = R^\top D L^\top\,.$$

Но LDR-разложение единственно, поэтому $L = R^\top$; следовательно,

$$A = R^\top D R\,.$$

3.7 Приведение КФ к каноническому виду заменой переменных с унитреугольной матрицей

3.7.1 Критерий и его доказательство

Теорема. Для того, чтобы квадратичная форма с невырожденной матрицей могла быть приведена к каноническому виду заменой переменных с верхней унитреугольной матрицей, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы формы были отличны от нуля (все угловые субматрицы — невырожденные).

Доказательство необходимости. Пусть матрица A невырожденная ($\det A \neq 0$) и пусть сделана замена переменных $\vec{x} = B\vec{y}$, где B — верхняя унитреугольная матрица, тогда

$$\tilde{A} = B^\top A B, \qquad A = F^\top \tilde{A} F,$$

F — верхняя унитреугольная матрица, и, следовательно, все угловые миноры матрицы A отличны от нуля.

Доказательство достаточности. Пусть все угловые миноры отличны от нуля, тогда возможно LDR-разложение

$$A = R^\top D R, \qquad D = (R^{-1})^\top A R^{-1}.$$

Сделаем замену переменных $\vec{x} = R^{-1}\vec{y}$ — это невырожденная замена с верхней унитреугольной матрицей. Таким образом, форма

$$f(\vec{x}) = f(R^{-1}\vec{y}) = \tilde{f}(\vec{y}) = \vec{y}^\top D \vec{y}$$

приведена к каноническому виду заменой переменных требуемого вида.

3.8 Критерий Сильвестра положительной определенности вещественной квадратичной формы

3.8.1 Критерий Сильвестра

(James Joseph Sylvester, $*\,1814$, $\dagger\,1897$)

Теорема. Для положительной определенности квадратичной формы f с вещественной симметрической матрицей A необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы A были больше нуля (все угловые субматрицы — невырожденные). Формально:

$$\forall\,\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \quad f(\vec{x}) = \vec{x}^\top \cdot A_{n\times n} \cdot \vec{x} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall k \in [1..n] \quad M_k > 0.$$

3.8.2 Доказательство

Необходимость. Пусть $\forall\,\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \quad f(\vec{x}) > 0$, тогда, предполагая невырожденную замену переменных $\vec{x} = B\vec{y}$ $(\det B \neq 0)$, приводящую КФ к нормальному виду

$$f(\vec{x}) = f(B\vec{y}) = \tilde{f}(\vec{y}) = y_1^2 + y_2^2 + \ \ldots\ + y_n^2 > 0,$$

получим следующую последовательность свойств матриц A, B и их детерминантов:

$$\tilde{A} = E = B^\top A B\,,$$

$$\det E = \det B^\top \cdot \det A \cdot \det B\,,$$

$$1 = (\det B)^2 \cdot \det A\,,$$

$$M_n = \det A > 0\,.$$

Фиксируем натуральный параметр $k: \quad 1 \leq k \leq (n-1)$ и рассмотрим столбцы аргументов специального строения:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Введем понятное обозначение «укороченного» вектора:

$$\vec{x}_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

и простое определение «укороченной» формы f_k :

$$f_k(\vec{x}_k) = f(\vec{x}) \,.$$

Предполагая невырожденную замену переменных $\vec{x}_k = B\vec{y}_k \quad (\det B \neq 0)$, приводящую КФ к нормальному виду

$$f(\vec{x}) = f_k(\vec{x}_k) = f_k(B\vec{y}_k) = \tilde{f}_k(\vec{y}_k) = y_1^2 + y_2^2 + \,\ldots\, + y_k^2 > 0 \,,$$

получим следующую последовательность свойств субматриц и угловых миноров:

$$\tilde{A}_k = E_k = B^\top A_k B \,,$$

$$\det E_k = \det B^\top \cdot \det A_k \cdot \det B \,,$$

$$1 = (\det B)^2 \cdot \det A_k \,,$$

$$M_k = \det A_k > 0 \,.$$

Достаточность. Пусть все угловые миноры

$$M_k > 0 \; (\neq 0), \quad k = 1, 2, \,\ldots\, , n \,.$$

Тогда для симметрической матрицы A существует LDR-разложение

$$A = R^\top D R \,,$$

при этом $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \,\ldots\, , d_n)$ и все

$$d_k = \frac{M_k}{M_{k-1}} = \frac{\text{положительное число}}{\text{положительное число}} > 0 \,.$$

Квадратичная форма

$$f(\vec{x}) = f(R^{-1}\vec{y}) = \tilde{f}(\vec{y}) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \,\ldots\, + d_n y_n^2 > 0$$

приведена к каноническому виду.

3.9 Ортогональное преобразование квадратичной формы к каноническому виду; подобные матрицы

3.9.1 Теорема о приведении

Теорема. Вещественная КФ может быть приведена к каноническому виду посредством замены переменных с **ортогональной матрицей**.

Доказательство. Проводится индукцией по порядку матрицы квадратичной формы.

База индукции. $n = 1$. Рассмотрим КФ одной переменной

$$f(x) = a \cdot x^2 .$$

Она уже находится в каноническом виде. Нас удовлетворит тривиальная замена переменной

$$x = 1 \cdot y ,$$

т.к. состоящая из одного числа матрица $[\,1\,]_{1\times 1}$ ортогональна.

Расширение базы индукции. $n = 2$.
Рассмотрим КФ двух переменных:

$$f(x_1, x_2) = f(\vec{x}) = \vec{x}^\top \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \vec{x} .$$

Пусть λ_1 — собственное число симметрической матрицы A, а столбец $\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix}$ — нормированный ($p_{11}^2 + p_{21}^2 = 1$) собственный вектор, соответствующий числу λ_1.

Примем $\vec{p}_1$ за первый столбец ортогональной матрицы

$$P = [\vec{p}_1 \; \vec{p}_2] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} .$$

Вычислим необходимые произведения, заменяя звездочками неинтересующие нас пока элементы:

$$AP = A[\vec{p}_1 \; \vec{p}_2] = [A\vec{p}_1 \; A\vec{p}_2] = [\lambda\vec{p}_1 \; \vec{*}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & * \\ \lambda_1 p_{21} & * \end{bmatrix} .$$

$$P^\top AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & * \\ \lambda_1 p_{21} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(p_{11}^2 + p_{21}^2) & * \\ \lambda_1(p_{12}p_{11} + p_{22}p_{21}) & * \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & * \end{bmatrix} =^*$$

но т.к. матрица симметрическая

$$=^* \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{bmatrix}.$$

Форма приведена к каноническому виду.

Расширение базы индукции. $n = 3$.

Рассмотрим КФ 3-х переменных

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(\vec{x}) = \vec{x}^\top \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Пусть λ_1 — собственное число симметрической матрицы A, а столбец $\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$ — нормированный ($p_{11}^2 + p_{21}^2 + p_{31}^2 = 1$) собственный вектор, соответствующий числу λ_1.

Примем $\vec{p}_1$ за первый столбец ортогональной матрицы

$$P = [\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}.$$

Вычислим необходимые произведения, заменяя звездочками неинтересующие нас пока элементы:

$$AP = A[\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3] = [A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3] = [\lambda \vec{p}_1 \ \vec{*} \ \vec{*}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & * & * \\ \lambda_1 p_{21} & * & * \\ \lambda_1 p_{31} & * & * \end{bmatrix}.$$

$$P^\top AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & * & * \\ \lambda_1 p_{21} & * & * \\ \lambda_1 p_{31} & * & * \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1(p_{11}^2 + p_{21}^2 + p_{31}^2) & * & * \\ \lambda_1(p_{12}p_{11} + p_{22}p_{21} + p_{32}p_{31}) & * & * \\ \lambda_1(p_{13}p_{11} + p_{23}p_{21} + p_{33}p_{31}) & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} =^{**}$$

но т.к. матрица симметрическая, то

$$=^{**}\left[\begin{array}{c|cc}\lambda_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & b_{11} & b_{12}\\ 0 & b_{21} & b_{22}\end{array}\right].$$

Сделав замену переменных y_2, y_3 с помощью ортогональной матрицы Q 2-го порядка, приведем субматрицу B к каноническому виду (это возможно по предыдущему пункту).

Произведение $P\cdot\left[\begin{array}{c|c}1 & 0\\ \hline 0 & Q\end{array}\right]$ есть ортогональная матрица, приводящая исходную форму f к каноническому виду.

Индукционный переход. $(n-1)\longrightarrow n$. Пусть наша теорема верна для всех матриц $(n-1)$-го порядка. Рассмотрим КФ n переменных

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(\vec{x})=\vec{x}^{\top}A\vec{x}.$$

Пусть λ_1 — собственное число симметрической матрицы A, а столбец

$\vec{p}_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ \vdots\\ p_{n1}\end{bmatrix}$ — нормированный ($p_{11}^2+p_{21}^2+\ldots+p_{n1}^2=1$) собственный вектор, соответствующий числу λ_1. Примем $\vec{p}_1$ за первый столбец ортогональной матрицы

$$P=[\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \ldots\ \vec{p}_n].$$

Вычислим необходимые произведения, заменяя звездочками неинтересующие нас пока элементы:

$$AP=$$

$$=A[\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \ldots\ \vec{p}_n]=[A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ \ldots\ A\vec{p}_n]=[\lambda\vec{p}_1\ \vec{*}\ \ldots\ \vec{*}]=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c}\lambda_1p_{11} & \\ \lambda_1p_{21} & \\ \lambda_1p_{31} & *\\ \vdots & \\ \lambda_1p_{n1} & \end{array}\right].$$

$$P^\top AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{n2} \\ p_{13} & p_{23} & \dots & p_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 p_{11} & \\ \lambda_1 p_{21} & \\ \lambda_1 p_{31} & * \\ \vdots & \\ \lambda_1 p_{n1} & \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1(p_{11}^2 + p_{21}^2 + \dots + p_{n1}^2) & \dots \\ \lambda_1(p_{12}p_{11} + p_{22}p_{21} + \dots + p_{n2}p_{n1}) & \dots \\ \lambda_1(p_{13}p_{11} + p_{23}p_{21} + \dots + p_{n3}p_{n1}) & \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ \lambda_1(p_{1n}p_{11} + p_{2n}p_{21} + \dots + p_{nn}p_{n1}) & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix} =^*$$

но т.к. матрица симметрическая, то

$$=^* \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right].$$

Сделав замену переменных $y_2, y_3, \dots, y_n$ с помощью ортогональной матрицы Q $(n-1)$-го порядка, приведем субматрицу B к каноническому виду (это возможно по индукционному предположению).

Произведение $P \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$ есть ортогональная матрица, приводящая исходную форму f к каноническому виду.

3.9.2 Подобные матрицы

Определение. Матрица B называется подобной матрице A, если существует невырожденная матрица C, такая, что

$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C; \qquad \text{запись} \quad A \sim B.$$

Говорят, что B получена из A трансформированием матрицей C.

Основные свойства подобия.

- Рефлексивность: $A \sim A$, т.к. $A = E^{-1}AE$.
- Симметричность: $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$.
- Транзитивность: $\left\{ \begin{array}{l} A \sim B \\ B \sim D \end{array} \right. \Longrightarrow A \sim D$.

Теорема. Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические полиномы.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}\det(C^{-1}AC - \lambda E) &= \det(C^{-1}AC - C^{-1}\lambda EC) = \\ &= \det(C^{-1}(A-\lambda E)C) = \det C^{-1} \cdot \det(A-\lambda E) \cdot \det C = \\ &= \det(A - \lambda E).\end{aligned}$$

Анонс. К теории подобия двух матриц мы вернемся при изучении полиномиальных матриц в последующих лекциях этого семестра; там будет получен критерий подобия двух матриц (см. пункт 5.4.4).

3.9.3 Коэффициенты канонического вида квадратичной формы и столбцы ортогональной преобразующей матрицы

Пусть произведена замена переменных $\vec{x} = P\vec{y}$ с ортогональной матрицей P, приводящая квадратичную форму $f(\vec{x}) = \vec{x}^\top A\vec{x}$ к каноническому виду

$$\tilde{f}(\vec{y}\,) = f(P\vec{y}) = \vec{y}^\top P^\top AP\vec{y}\,,$$

где

$$P^\top AP = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)\,. \qquad (*)$$

Из ортогональности $(P^\top = P^{-1})$ следует, что $A \sim \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, и поэтому собственные числа матрицы A (с учетом кратности) суть диагональные элементы $d_1, d_2, \dots, d_n$, т.е. $\lambda_k = d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$

Из соотношения $(*)$ следует

$$AP = P \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

$$A[\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \dots\ \vec{p}_n] = [\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \dots\ \vec{p}_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$A[\vec{p}_{\cdot 1}\ \vec{p}_{\cdot 2}\ \dots\ \vec{p}_{\cdot n}] = [\lambda_1\vec{p}_{\cdot 1}\ \lambda_2\vec{p}_{\cdot 2}\ \dots\ \lambda_n\vec{p}_{\cdot n}]\,,$$

т.е. $\vec{p}_{\cdot k}$ — собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_k = d_k$.

3.9.4 Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническим видам

Постановка задачи. Пусть даны две квадратичные формы

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^\top A\vec{x},$$
$$h(\vec{x}) = \vec{x}^\top B\vec{x}.$$

Поставим вопрос: можно ли сделать замену переменных $\vec{x} = C\vec{z}$, приводящую обе формы к каноническим видам, т.е.

$$f(C\vec{z}) = \tilde{f}(\vec{z}) = \alpha_1\vec{z}_1^{\,2} + \alpha_2\vec{z}_2^{\,2} + \ \ldots \ + \alpha_n\vec{z}_n^{\,2} \ ,$$
$$h(C\vec{z}) = \tilde{h}(\vec{z}) = \beta_1\vec{z}_1^{\,2} + \beta_2\vec{z}_2^{\,2} + \ \ldots \ + \beta_n\vec{z}_n^{\,2} \ ?$$

Ответ на этот вопрос положительно-отрицательный: это можно сделать, но... не всегда. Положительную ситуацию освещает следующее достаточное условие.

Теорема. Две КФ, одна из которых положительно определенная, можно одной невырожденной заменой переменных привести к каноническим видам.

Доказательство. Пусть h — положительно определенная КФ; пусть замена переменных $\vec{x} = C\vec{y}$ приводит форму h к каноническому виду с матрицей

$$C^\top BC = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ \ldots \ , b_n), \quad b_j > 0\,;$$

пусть сделана еще одна замена переменных $\vec{y} = D\vec{v}$ с матрицей

$$D = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}, \frac{1}{\sqrt{b_2}}, \ \ldots \ , \frac{1}{\sqrt{b_n}}\right) \ .$$

Тогда форма h будет приведена к нормальному виду

$$\tilde{h}(\vec{v}) = v_1^2 + v_2^2 + \ \ldots \ + v_n^2$$

с матрицей

$$D^\top C^\top \cdot B \cdot CD = E\,.$$

При этой замене форма $f(\vec{x})$ превратится в форму $\tilde{f}(\vec{v})$ с матрицей

$$\tilde{A} = D^\top C^\top \cdot A \cdot CD\,.$$

Сделаем третью замену переменных $\vec{v} = P\vec{z}$ с ортогональной матрицей P, приводящей форму $\tilde{f}$ к каноническому виду

$$\tilde{\tilde{f}}(\vec{z}) = \alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 + \ \ldots \ + \alpha_n z_n^2 \,.$$

Матрица же формы $\tilde{h}$ при этой замене переменных не изменится, т.к. в силу ортогональности матрицы P

$$P^\top E P = P^\top P = E \,,$$

и поэтому

$$\tilde{\tilde{h}}(\vec{z}) = z_1^2 + z_2^2 + \ \ldots \ + z_n^2 \,.$$

3.9.5 Пример одновременного приведения двух квадратичных форм к каноническим видам

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_1x_2 + 26x_2^2 \,,$$
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + 56x_2^2 \,.$$

Решение. Выделим в первой форме полный квадрат:

$$h(x_1, x_2) = (x_1 + 5x_2)^2 + x_2^2 > 0 \,.$$

Форма положительно определенная; введем новые переменные
$\begin{cases} y_1 = x_1 + 5x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$ и выразим старые через новые: $\begin{cases} x_1 = y_1 - 5y_2 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$.
Сделаем замену переменных в двух исходных формах:

$$\tilde{h}(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2,$$

$$\tilde{f}(y_1, y_2) = (y_1 - 5y_2)^2 + 16(y_1 - 5y_2)y_2 + 56y_2^2 = y_1^2 + 6y_1y_2 + y_2^2 \,.$$

Матрица последней формы $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Далее будем искать ортогональное преобразование переменных, приводящее форму $\tilde{f}$ к каноническому виду.

Составим характеристический полином:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 \,.$$

Решим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \,; \qquad \lambda_1 = 4, \ \ \lambda_2 = -2 \,.$$

Найденные собственные числа будут коэффициентами канонического вида второй формы:
$$\tilde{\tilde{f}}(z_1, z_2) = 4z_1^2 - 2z_2^2\,.$$
Найдем столбцы матрицы соответствующего преобразования как собственные векторы, относящиеся к собственным числам.

Для $\lambda = 4$:
$$\left[\begin{array}{cc|} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]; \quad \left\{\begin{array}{l} t_1 = t_2 \\ t_2 = t_2 \end{array}\right. ; \quad \vec{t_1} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right];$$
для $\lambda = -2$:
$$\left[\begin{array}{cc|} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]; \quad \left\{\begin{array}{l} t_1 = -t_2 \\ t_2 = t_2 \end{array}\right. ; \quad \vec{t_2} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right].$$

Вот замена переменных:
$$\vec{y} = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right] \vec{z}.$$

Общая замена переменных:
$$\vec{x} = \left[\begin{array}{cc} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right] \vec{z} = \left[\begin{array}{cc} \frac{-4}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right] \vec{z}.$$

Ответ. Замена переменных (в покомпонентной форме)
$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = -\frac{4}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{6}{\sqrt{2}} z_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 \end{array}\right.$$
приводит формы
$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_1x_2 + 26x_2^2\,,$$
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + 56x_2^2$$
к каноническим видам
$$\tilde{\tilde{h}}(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2\,,$$
$$\tilde{\tilde{f}}(z_1, z_2) = 4z_1^2 - 2z_2^2\,.$$

4 Эрмитовы формы

4.1 Эрмитовы формы — аналог квадратичных форм

4.1.1 Определение и простые свойства

Определение. Эрмитова форма — это полином над $\mathbb{C}$ от n комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и n сопряженных к ним переменных $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n$ с самосопряженной (эрмитовой) матрицей:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{z}_i z_j, \qquad \text{где} \quad a_{ij} = \overline{a_{ji}}, \quad a_{ii} \in \mathbb{R}.$$

В матричной записи:

$$f(\vec{z}) = \vec{z}^{\,*} A \vec{z}, \qquad \text{где} \quad A^* = A\,.$$

Замена переменных. Если положить $\vec{z} = B\vec{w}$, то ЭФ превращается в другую форму:

$$\tilde{f}(\vec{w}) = f(B\vec{w}) = (B\vec{w})^* A (B\vec{w}) = \vec{w}^{\,*} \underbrace{(B^*AB)}_{\tilde{A}} \vec{w}\,.$$

Матрица $\tilde{A}$ вновь эрмитова, ибо

$$\tilde{A}^* = (B^*AB)^* = B^*A^*(B^*)^* = B^*AB\,.$$

Две последовательно выполненные замены переменных

$$\vec{z} = B_1\vec{w}, \quad \vec{w} = B_2\vec{r}$$

эквивалентны одной замене с матрицей, равной произведению (B_1B_2) :

$$\vec{z} = (B_1B_2)\vec{r}\,.$$

При этом матрица эрмитовой формы изменится так:

$$\tilde{A} = B_1^*AB_1; \qquad \tilde{\tilde{A}} = B_2^* \cdot B_1^*AB_1 \cdot B_2 = (B_1B_2)^*A(B_1B_2).$$

4.1.2 Вещественнозначность эрмитовых форм

Теорема. Эрмитовы формы вещественнозначны, т.е.

$$\forall\, \vec{z} \in \mathbb{C}^n \qquad f(\vec{z}) \in \mathbb{R}.$$

Доказательство.

$$\overline{f(\vec{z})} = \overline{f(\vec{z})}^{\top} = (f(\vec{z}))^* = (\vec{z}^* A \vec{z})^* = \vec{z}^* A \vec{z} = f(\vec{z})\,.$$

4.1.3 Приведение эрмитовой формы к каноническому виду

Теорема. Посредством замены переменных с невырожденной комплексной матрицей всякая эрмитова форма

$$f(\vec{z}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \bar{z}_i z_j$$

может быть приведена к сумме квадратов модулей с вещественными коэффициентами:

$$\tilde{f}(\vec{\tau}) = \tilde{\alpha}_1 |\tau_1|^2 + \tilde{\alpha}_2 |\tau_2|^2 + \ \dots \ + \tilde{\alpha}_n |\tau_n|^2, \qquad \tilde{\alpha}_j \in \mathbb{R}.$$

Эта ЭФ и называется каноническим видом исходной ЭФ.

Доказательство.

- Если $\forall j \quad a_{jj} = 0,$ но $\exists (j,k) \quad a_{jk} \neq 0,$ то делается невырожденная замена переменных с матрицей $E \begin{pmatrix} i & i+k \\ & k \end{pmatrix}$.
- Если $a_{11} = 0, \quad \exists k \quad a_{kk} \neq 0,$ то делается невырожденная замена переменных с матрицей $E(1 \leftrightarrow k)$.
- Делается невырожденная замена переменных с матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь форма имеет более простой вид:

$$\tilde{\alpha}_1 |w_1|^2 + \varphi(w_2, \dots, w_n)\,,$$

а ее матрица — блочно-диагональная:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \tilde{\alpha}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_{11} & \\ 0 & & & \end{array} \right].$$

Далее алгоритм, изложенный в трех отмеченных пунктах, применяется к ЭФ с матрицей A_{11} .

И так далее...

В результате и возникает форма в каноническом виде:

$$\tilde{f}(\vec{\tau}) = \tilde{\alpha}_1|\tau_1|^2 + \tilde{\alpha}_2|\tau_2|^2 + \ldots + \tilde{\alpha}_n|\tau_n|^2, \qquad \tilde{\alpha}_j \in \mathbb{R}.$$

4.1.4 Матричный эквивалент теоремы о приведении эрмитовой формы к каноническому виду

Для всякой эрмитовой матрицы A $(A = A^*)$ существует невырожденная матрица B $(\det B \neq 0, \ b_{ij} \in \mathbb{C})$, такая, что

$$B^*AB = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

4.1.5 Приведение эрмитовой формы к нормальному виду над полем $\mathbb{C}$

Сделав перенумерацию переменных (с помощью невырожденной замены переменных), форму можно записать так:

$$\alpha_1|\tau_1|^2 + \ldots + \alpha_m|\tau_m|^2 - \alpha_{m+1}|\tau_{m+1}|^2 - \ldots - \alpha_k|\tau_k|^2 + 0 + \ldots + 0,$$

где все явно выписанные коэффициенты $\alpha_j > 0$.

Сделав еще одну невырожденную замену переменных

$$\begin{cases} \tau_j = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_j}} u_j & \text{при} \quad 0 \le j \le k \\ \tau_j = u_j & \text{при} \quad j > k\ , \end{cases}$$

получим форму в нормальном виде:

$$|u_1|^2 + \ldots + |u_m|^2 - |u_{m+1}|^2 - \ldots - |u_k|^2 .$$

Матричный эквивалент теоремы. Для всякой эрмитовой матрицы A существует невырожденная матрица B, такая, что

$$B^*AB = \operatorname{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots\ldots, 1}_{m \text{ шт.}}, \underbrace{-1, -1, \ldots\ldots, -1}_{(k-m) \text{ шт.}}, \underbrace{0, 0, \ldots\ldots, 0}_{(n-k) \text{ шт.}}) .$$

4.2 Приведение эрмитовой формы к каноническому виду посредством замены переменных с унитреугольной матрицей; положительно определенные эрмитовы формы

4.2.1 LDR-разложение эрмитовой матрицы

Пусть $A = A^*$, тогда $A = LDR = R^*DL^*$; но LDR-разложение единственно, поэтому $L = R^*$ и, следовательно,

$$A = R^*DR, \qquad R \text{ — верхняя унитреугольная матрица}.$$

4.2.2 Критерий

Теорема. Для того, чтобы ЭФ с невырожденной матрицей могла быть приведена к каноническому виду заменой переменных с верхней унитреугольной матрицей, необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые миноры были отличны от нуля (все угловые субматрицы невырожденные).

4.2.3 Положительно определенные ЭФ

Определение. Эрмитова форма f называется положительно определенной, если

$$\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\} \qquad f(\vec{z}) > 0\,.$$

Теорема. Для положительной определенности ЭФ необходимо и достаточно, чтобы в каноническом виде этой формы все коэффициенты были больше нуля.

4.2.4 Критерий (Сильвестра)

Теорема. Для того, чтобы эрмитова форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны.

4.3 Унитарное преобразование эрмитовой формы к каноническому виду

4.3.1 Теорема о приведении

Теорема. Эрмитова форма может быть приведена к каноническому виду посредством замены переменных с **унитарной матрицей.**

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы для вещественной КФ и ортогональной матрицы. Рассмотрим ЭФ n переменных

$$f(\vec{z}) = \overline{\vec{z}^{\top}} A\vec{z}, \qquad A = A^*.$$

Пусть λ_1 есть собственное число эрмитовой матрицы A, а столбец

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix}$$

есть нормированный собственный вектор ($|p_{11}|^2+|p_{21}|^2+\ldots+|p_{n1}|^2 = 1$), соответствующий числу λ_1 .

Примем $\vec{p}_1$ за первый столбец унитарной матрицы

$$P = \left[\begin{array}{c|c} p_{11} & \\ p_{21} & \\ p_{31} & * \\ \vdots & \\ p_{n1} & \end{array}\right].$$

Сделаем простые вычисления:

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c} p_{11} & \\ p_{21} & \\ p_{31} & * \\ \vdots & \\ p_{n1} & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 p_{11} & \\ \lambda_1 p_{21} & \\ \lambda_1 p_{31} & * \\ \vdots & \\ \lambda_1 p_{n1} & \end{array}\right];$$

$$P^*AP = \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{21} & \ldots & \bar{p}_{n1} \\ \bar{p}_{12} & \bar{p}_{22} & \ldots & \bar{p}_{n2} \\ \bar{p}_{13} & \bar{p}_{23} & \ldots & \bar{p}_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{p}_{1n} & \bar{p}_{2n} & \ldots & \bar{p}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 p_{11} & \\ \lambda_1 p_{21} & \\ \lambda_1 p_{31} & * \\ \vdots & \\ \lambda_1 p_{n1} & \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1(|p_{11}|^2 + |p_{21}|^2 + \ldots + |p_{n1}|^2) & \ldots \\ \lambda_1(\bar{p}_{12}p_{11} + \bar{p}_{22}p_{21} + \ldots + \bar{p}_{n2}p_{n1}) & \ldots \\ \lambda_1(\bar{p}_{13}p_{11} + \bar{p}_{23}p_{21} + \ldots + \bar{p}_{n3}p_{n1}) & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \lambda_1(\bar{p}_{1n}p_{11} + \bar{p}_{2n}p_{21} + \ldots + \bar{p}_{nn}p_{n1}) & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \end{bmatrix} =^*$$

но т.к. матрица самосопряженная (эрмитова), то

$$
=^{*} \left[\begin{array}{c|ccc}
\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & & & \\
\vdots & & B & \\
0 & & &
\end{array}\right].
$$

Сделав еще одну замену переменных с помощью унитарной матрицы Q $(n-1)$-го порядка, приведем B к каноническому виду.

Произведение $P \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$ есть унитарная матрица, приводящая исходную форму f к каноническому виду.

4.3.2 Коэффициенты канонического вида эрмитовой формы и столбцы унитарной преобразующей матрицы

Пусть произведена замена переменных $\vec{x} = P\vec{y}$ с унитарной матрицей P, приводящая эрмитову форму $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\,*}A\vec{x}$ к каноническому виду:

$$
\tilde{f}(\vec{y}) = f(P\vec{y}) = \vec{y}^{\,*}P^{*}AP\vec{y},
$$

где

$$
P^{*}AP = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n). \qquad (*)
$$

Но $P^{*} = P^{-1}$, и поэтому $A \sim \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Собственные числа матрицы A (с учетом кратности) суть диагональные элементы $d_1, d_2, \dots, d_n$, т.е. $\lambda_k = d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$.

Из соотношения $(*)$ следует:

$$
AP = P \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),
$$

$$
A[\vec{p}_{\cdot 1}\ \vec{p}_{\cdot 2}\ \dots\ \vec{p}_{\cdot n}] = [\vec{p}_{\cdot 1}\ \vec{p}_{\cdot 2}\ \dots\ \vec{p}_{\cdot n}] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},
$$

$$
A[\vec{p}_{\cdot 1}\ \vec{p}_{\cdot 2}\ \dots\ \vec{p}_{\cdot n}] = [\lambda_1\vec{p}_{\cdot 1}\ \lambda_2\vec{p}_{\cdot 2}\ \dots\ \lambda_n\vec{p}_{\cdot n}],
$$

т.е. $\vec{p}_{\cdot k}$ — собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_k = d_k$.

4.4 Одновременное приведение двух эрмитовых форм к каноническим видам

Пусть даны две эрмитовы формы

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^{\,*} A\vec{x},$$
$$h(\vec{x}) = \vec{x}^{\,*} B\vec{x}.$$

Вопрос: можно ли сделать замену переменных $\vec{x} = C\vec{v}$, приводящую обе формы к каноническим видам, т.е.

$$f(C\vec{v}) = \tilde{f}(\vec{v}) = \alpha_1|\vec{v}_1|^2 + \alpha_2|\vec{v}_2|^2 + \ldots + \alpha_n|\vec{v}_n|^2,$$
$$h(C\vec{v}) = \tilde{h}(\vec{v}) = \beta_1|\vec{v}_1|^2 + \beta_2|\vec{v}_2|^2 + \ldots + \beta_n|\vec{v}_n|^2 \ ?$$

Ответ: это можно сделать не всегда. Но!..

4.4.1 Теорема об одновременном приведении

Теорема. Две ЭФ, одна из которых положительно определенная, можно одной невырожденной заменой переменных привести к каноническим видам.

Доказательство. Пусть h — положительно определенная ЭФ, пусть замена переменных $\vec{x} = C\vec{y}$ приводит форму h к каноническому виду с матрицей

$$C^*BC = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n), \quad b_j > 0;$$

пусть сделана еще одна замена переменных $\vec{y} = D\vec{z}$ с матрицей

$$D = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}; \frac{1}{\sqrt{b_2}}; \ldots; \frac{1}{\sqrt{b_n}}\right),$$

тогда форма h приведется к нормальному виду $\tilde{h}(\vec{z}) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$ с матрицей $D^*C^* \cdot B \cdot CD = E$, при этом форма $f(\vec{x})$ превратится в форму $\tilde{f}(\vec{z})$ с матрицей

$$\tilde{A} = D^*C^* \cdot A \cdot CD.$$

Сделаем третью замену переменных $\vec{z} = P\vec{v}$ с унитарной матрицей P, приводящей форму $\tilde{f}$ к каноническому виду

$$\tilde{\tilde{f}}(\vec{v}) = \alpha_1|v_1|^2 + \alpha_2|v_2|^2 + \ldots + \alpha_n|v_n|^2.$$

Матрица формы $\tilde{h}$ при этом не изменится, т.к.

$$P^*EP = P^*P = E \quad (\text{в силу ортогональности } P).$$

$$\tilde{\tilde{h}}(\vec{v}) = |v_1|^2 + |v_2|^2 + \ldots + |v_n|^2.$$

5 λ-матрицы

5.1 Полиномиальные матрицы (λ-матрицы)

5.1.1 Определение

Полиномиальная матрица (многочленная матрица, λ-матрица) — это матрица, элементами которой являются полиномы от одной переменной (традиционно обозначаемой буквой λ) с коэффициентами из фиксированного числового поля $\mathbb{F}$: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$; эти полиномы образуют, как мы знаем, коммутативное кольцо с единицей $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Общий вид λ-матрицы:

$$A_{m\times n}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Степень λ-матрицы — это наивысшая степень полиномов, составляющих λ-матрицу: $\deg A(\lambda) = \max\limits_{i,j}\{\deg a_{ij}(\lambda)\}$.

Полиномы степени < 1 канонически отождествляются с элементами поля $\mathbb{F}$.

λ-матрицы, состоящие только из полиномов степени < 1, называют кратко **числовыми матрицами.**

5.1.2 Элементарные преобразования λ-матриц над полем $\mathbb{F}$

Строковые и столбцовые элементарные преобразования (ЭП) λ-матриц аналогичны строковым и столбцовым ЭП числовых матриц.

Строковые преобразования.

- Умножение любой строки матрицы на любое ненулевое число
$$\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}.$$
- Прибавление к i-й строке другой j-й строки, умноженной предварительно на произвольный полином из $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.
- Перестановка i-й и j-й строк. Это преобразование не является самостоятельным элементарным преобразованием: его можно свести к преобразованиям предыдущих типов:
$$\begin{bmatrix} <i> \\ <j> \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} <i+j> \\ <j> \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} <i+j> \\ <-i> \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} <j> \\ <-i> \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} <j> \\ <i> \end{bmatrix}.$$

Столбцовые преобразования. Аналогичны строковым.

Обратимость ЭП. Для каждого ЭП существует единственное обратное ЭП:

- $\begin{bmatrix} <i> \\ <j> \end{bmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{bmatrix} \alpha <i> \\ <j> \end{bmatrix} \xrightarrow{\pi^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha <i> \\ <j> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <i> \\ <j> \end{bmatrix}$;
- $\begin{bmatrix} <i> \\ <j> \end{bmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{bmatrix} <i> + <j> \varphi(\lambda) \\ <j> \end{bmatrix} \xrightarrow{\pi^{-1}}$
$$\xrightarrow{\pi^{-1}} \begin{bmatrix} (<i> + <j> \varphi(\lambda)) + <j> (-\varphi(\lambda)) \\ <j> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <i> \\ <j> \end{bmatrix};$$
- $\begin{bmatrix} <i> \\ <j> \end{bmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{bmatrix} <j> \\ <i> \end{bmatrix} \xrightarrow{\pi^{-1}} \begin{bmatrix} <i> \\ <j> \end{bmatrix}$; $\qquad \pi^{-1} = \pi.$

Аналогично и для столбцовых преобразований.

5.1.3 Эквивалентность λ-матриц

Определение. Матрицы называются эквивалентными, если одна из них может быть получена из другой последовательностью ЭП:

$$A(\lambda) \xrightarrow{\pi_1} A_1(\lambda) \xrightarrow{\pi_2} A_2(\lambda) \xrightarrow{\pi_3} \ldots \xrightarrow{\pi_k} A_k(\lambda) = B(\lambda)\,.$$

Понятно, что и $A(\lambda)$ может быть получена из $B(\lambda)$ последовательностью ЭП:

$$B(\lambda) = A_k(\lambda) \xrightarrow{\pi_k^{-1}} A_{k-1}(\lambda) \xrightarrow{\pi_{k-1}^{-1}} \ldots \xrightarrow{\pi_3^{-1}} A_2(\lambda) \xrightarrow{\pi_2^{-1}} A_1(\lambda) \xrightarrow{\pi_1^{-1}} A(\lambda)\,.$$

Отношение эквивалентности обозначается достаточно традиционно:

$$A(\lambda) \sim B(\lambda)\,.$$

Понятно, что множество матриц размера $m \times n$ распадается на непересекающиеся классы эквивалентных матриц.

5.1.4 Канонические λ-матрицы

Определение. Квадратная λ-матрица $A(\lambda)$ называется канонической, если она обладает следующими свойствами:

- матрица диагональная

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & & & \\ & e_2(\lambda) & & \text{O} \\ \text{O} & & \ddots & \\ & & & e_n(\lambda) \end{bmatrix};$$

- каждый ненулевой полином имеет **единичный старший коэффициент**;

- каждый $e_j(\lambda)$ является делителем (делит) $e_{j+1}(\lambda)$; формально:

$$e_{j+1}(\lambda) \div e_j(\lambda), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Ввиду последнего условия нулевые полиномы занимают самые нижние позиции главной диагонали, а полиномы нулевой степени (тождественно равные 1), занимают самые верхние позиции главной диагонали.

Если числовые матрицы являются каноническими λ-матрицами, то они заполнены нулями, и только на некоторых верхних позициях главной диагонали могут стоять 1; так, единичные и нулевые матрицы являются каноническими λ-матрицами.

5.2 Приведение λ-матрицы к каноническому виду

5.2.1 Теорема о приведении

Теорема. Всякая квадратная λ-матрица эквивалентна (последовательностью ЭП может быть приведена к) некоторой канонической λ-матрице.

5.2.2 Доказательство индукцией по порядку матрицы n

База индукции. $n = 1$.

$$A(\lambda) = [a_{11}(\lambda)]\,.$$

Если $a_{11}(\lambda) \equiv 0$, то $A(\lambda) = [a_{11}(\lambda)]$ уже находится в канонической форме.

Если $a_{11}(\lambda) = \tilde{c}_r\lambda^r + \ldots + \tilde{c}_1\lambda + \tilde{c}_0$ и $\tilde{c}_r \neq 0$, то, умножая полином $a_{11}(\lambda)$ на $\dfrac{1}{\tilde{c}_r} \in \mathbb{F}$, получим каноническую λ-матрицу с единственным полиномиальным членом

$$e_1(\lambda) = \lambda^r + c_{r-1}\lambda^{r-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0\,.$$

Расширение базы индукции. $n = 2$.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Если все $a_{ij}(\lambda) \equiv 0$, то $A(\lambda)$ уже находится в канонической форме.

Если не все $a_{ij}(\lambda) \equiv 0$, то можно перестановками строк и столбцов добиться того, чтобы в верхнем левом углу оказался ненулевой полином.

Рассмотрим все матрицы, эквивалентные $A(\lambda)$ с $a_{11}(\lambda) \not\equiv 0$, а среди них такую, у которой степень $\deg a_{11}(\lambda)$ наименьшая из всех возможных и старший коэффициент $= 1$ (оптимальность выбора эквивалентной матрицы); таким образом,

$$A(\lambda) \sim \tilde{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & b_{12}(\lambda) \\ b_{21}(\lambda) & b_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Полиномы $b_{12}(\lambda)$ и $b_{21}(\lambda)$ делятся на $e_1(\lambda)$ нацело. Действительно, если предположить противное, то, например, $b_{12}(\lambda) = e_1(\lambda) \cdot \varphi(\lambda) + \tilde{e}_1(\lambda)$, и с помощью элементарных преобразований (ко второму столбцу прибавляется первый, умноженный предварительно на $(-\varphi(\lambda)$, затем 1-й и 2-й столбцы меняются местами) можно бы было получить еще одну эквивалентную λ-матрицу с элементом $\tilde{e}_1(\lambda)$, степень которого меньше степени $e_1(\lambda)$, а это противоречило бы оптимальности выбора матрицы $\tilde{A}(\lambda)$. Аналогично и для $b_{21}(\lambda)$.

Так как полиномы $b_{12}(\lambda)$ и $b_{21}(\lambda)$ делятся на $e_1(\lambda)$ без остатков, аннулируем их с помощью элементарных преобразований.

Теперь

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Если $\tilde{b}_{22}(\lambda) \equiv 0$, то матрица уже в канонической форме.

Если $\deg \tilde{b}_{22}(\lambda) \geq 1$, то $\deg \tilde{b}_{22}(\lambda) \geq \deg e_1(\lambda)$ (а то было бы противоречие с оптимальностью выбора эквивалентной матрицы), и полином e_1 делит полином $\tilde{b}_{22}$ без остатка, а то опять было бы противоречие с оптимальностью выбора эквивалентной матрицы.

Разделяя нижнюю строку на старший коэффициент полинома $\tilde{b}_{22}$, получим каноническую диагональную форму

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) \end{bmatrix}; \qquad e_2(\lambda) \div e_1(\lambda).$$

Индукционный переход. $(n-1) \longrightarrow n$. Пусть всякая квадратная матрица размера $(n-1)\times(n-1)$ эквивалентна некоторой канонической λ-матрице.

Рассмотрим произвольную квадратную λ-матрицу размера $n \times n$:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Если все $a_{ij}(\lambda) \equiv 0$, то $A(\lambda)$ уже находится в канонической форме. Если не все $a_{ij}(\lambda) \equiv 0$, то можно перестановками строк и столбцов добиться того, чтобы в верхнем левом углу оказался ненулевой полином.

Рассмотрим все матрицы, эквивалентные $A(\lambda)$, с $a_{11}(\lambda) \not\equiv 0$, а среди них такую, у которой степень $\deg a_{11}(\lambda)$ наименьшая из всех возможных и старший коэффициент $= 1$ (оптимальность выбора эквивалентной матрицы); таким образом,

$$A(\lambda) \sim \tilde{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & \dots & b_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Полиномы $b_{1k}(\lambda)$ и $b_{k1}(\lambda)$ делятся на $e_1(\lambda)$ нацело. Действительно, если предположить противное, то, например, $b_{1k}(\lambda) = e_1(\lambda)\cdot\varphi_k(\lambda)+\tilde{e}_1(\lambda)$, и с помощью элементарных преобразований (к k-му столбцу прибавляется первый, умноженный предварительно на $(-\varphi_k(\lambda)$, затем 1-й и k-й столбцы меняются местами) можно бы было получить эквивалентную λ-матрицу с элементом $\tilde{e}_1(\lambda)$, степень которого меньше степени $e_1(\lambda)$, а это противоречило бы оптимальности выбора матрицы $\tilde{A}(\lambda)$.

Так как полиномы $b_{1k}(\lambda)$ и $b_{k1}(\lambda)$ делятся на $e_1(\lambda)$ без остатков, аннулируем их с помощью элементарных преобразований. Теперь

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{22}(\lambda) & \dots & \tilde{b}_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \tilde{b}_{n2}(\lambda) & \dots & \tilde{b}_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Согласно индукционному предположению матрица $\tilde{B}_{(n-1)\times(n-1)}(\lambda)$ может быть приведена к каноническому виду; та же последовательность преобразований применима и к матрице $\tilde{A}_{n\times n}(\lambda)$, т.е.

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & & & \\ & e_2(\lambda) & & \text{O} \\ \text{O} & & \ddots & \\ & & & e_n(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Полином $e_2(\lambda)$ делится на $e_1(\lambda)$ без остатка, иначе это противоречило бы оптимальности выбора матрицы.

Перед нами каноническая форма λ-матрицы.

5.3 Инвариантные множители λ-матрицы

5.3.1 Директоры λ-матрицы

Определение. Пусть $A(\lambda)$ — λ-матрица n-го порядка. Для каждого натурального $k \le n$ можно вычислить все миноры k-го порядка, и для них найти НОД с единичным старшим коэффициентом — нормированный наибольший общий делитель (ННОД). Это будет некоторый полином $d_k(\lambda)$ — директор k-го порядка матрицы $A(\lambda)$.

Замечание. Термин «директор» не является распространенным в учебной литературе, но постоянно используется в настоящих лекциях.

Каждая полиномиальная матрица $A(\lambda)$ однозначно определяет ряд директоров 1-го, 2-го, ... , n-го порядков:

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), d_3(\lambda), \ \dots\ , d_n(\lambda)\,.$$

Понятно, что в этом ряду $d_1(\lambda)$ есть ННОД всех членов матрицы, а $d_n(\lambda)$ есть $\det A(\lambda)$, деленный на старший коэффициент (ведь $\det A(\lambda)$ это полином).

Понятно также, что если $\operatorname{rang} A(\lambda) = r$, то

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} d_1(\lambda) \not\equiv 0 \\ d_2(\lambda) \not\equiv 0 \\ \dots\dots\dots \\ d_r(\lambda) \not\equiv 0 \end{array} \right. \\ \\ d_{r+1}(\lambda) \equiv d_{r+2}(\lambda) \equiv \ldots \equiv d_n(\lambda) \equiv 0 \end{array} \right. .$$

5.3.2 Инвариантность директоров

Теорема. При элементарных преобразованиях $A(\lambda) \xrightarrow{\pi} \tilde{A}(\lambda)$ директоры матрицы не меняются, т.е. директоры матрицы $A(\lambda)$ совпадают с директорами эквивалентной матрицы $\tilde{A}(\lambda)$.

Доказательство для строковых преобразований. (Этого достаточно ввиду инвариантности детерминантов при транспонировании.)

- Умножение i-й строки на ненулевой элемент поля $\alpha \neq 0$.

  При таком элементарном преобразовании миноры, через которые не проходит i-я строка, не меняются, а миноры, через которые i-я строка проходит, умножаются на $\alpha \neq 0$, что не изменяет ННОД.

- Прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной предварительно на некоторый (произвольный) полином $\varphi(\lambda)$.

  Миноры, через которые не проходит i-я строка или проходят и i-я, и j-я строки, не меняются.

  Если i-я строка проходит, а j-я строка не проходит через минор, то

  $$A(\lambda) = \begin{bmatrix} < i > \\ < j > \end{bmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{bmatrix} < i > + \varphi(\lambda) < j > \\ < j > \end{bmatrix} = \tilde{A}(\lambda).$$

  Таким образом, каждый минор k-го порядка преобразованной матрицы $\tilde{A}(\lambda)$

  $$\tilde{M}_k = M_k + \varphi(\lambda) M_k' \quad \text{или} \quad \tilde{M}_k = M_k,$$

  где M_k, M_k' — миноры k-го порядка исходной матрицы $A(\lambda)$.

  Так как M_k, M_k' делятся на d_k, то $\tilde{M}_k$ также делится на d_k, т.е. все новые миноры k-го порядка делятся на d_k, и, следовательно, $\tilde{d}_k$ делится на d_k.

  Рассматривая обратное преобразование π^{-1}, поймем, что d_k делится на $\tilde{d}_k$, а т.к. старшие коэффициенты директоров $= 1$, можно заключить, что

  $$d_k(\lambda) = \tilde{d}_k(\lambda).$$

Теперь ясно, что все эквивалентные между собой λ-матрицы и каждая каноническая форма λ-матрицы (нам пока неизвестно, что каноническая форма единственна — это предмет следующего пункта) имеют один и тот же набор директоров $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

5.3.3 Инвариантные множители λ-матрицы, единственность канонической формы λ-матрицы

Построение-определение. Вычислим директоры матрицы $A(\lambda)$ по канонической матрице.

$$\tilde{\tilde{A}}(\lambda) = \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & & & \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n(\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & & & & & & & \\ & e_1(\lambda)\varepsilon_2 & & & & & & \\ & & e_1(\lambda)\varepsilon_2\varepsilon_3 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & e_1(\lambda)\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_r & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

В этой матрице $\varepsilon_j = \varepsilon_j(\lambda)$ — полиномы.

Вычислим директоры матрицы $\tilde{\tilde{A}}(\lambda)$.

$d_1(\lambda) = \text{НОД}\{e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_n(\lambda)\} = e_1(\lambda)$,

$d_2(\lambda) = \text{НОД}\{e_1e_2, e_1e_3, \ldots, e_1e_n; e_2e_3, \ldots, e_2e_n; \ldots; e_{n-1}e_n\} =$
$= e_1(\lambda)e_2(\lambda)$,

$d_3(\lambda) = \text{НОД}\{e_1e_2e_3, \ldots, e_1e_2e_n; e_1e_2e_4, \ldots, e_1e_2e_n; \ldots; e_{n-2}e_{n-1}e_n\} =$
$= e_1(\lambda)e_2(\lambda)e_3(\lambda)$,

. . . .

$d_r(\lambda) = e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ldots e_r(\lambda)$,

$d_{r+1}(\lambda) = 0$,

. . . .

$d_n(\lambda) = 0$.

Таким образом, полиномы $e_k(\lambda)$ однозначно определяются директорами:

$e_1(\lambda) = d_1(\lambda)$;

$e_k(\lambda) = \dfrac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)}, \qquad k = 2, 3, \ldots, r;$

$e_j(\lambda) = 0, \qquad j = r+1, r+2, \ldots, n.$

Полиномы $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_n(\lambda)$ называются **инвариантными множителями** матрицы $A(\lambda)$ (и любой ей эквивалентной). Они однозначно определяются матрицей $A(\lambda)$. Тем самым доказано следующее предложение.

Теорема. Для всякой λ-матрицы $A(\lambda)$ эквивалентная ей каноническая λ-матрица единственна и ее диагональные элементы суть инвариантные множители матрицы $A(\lambda)$.

Пример. Привести к каноническому виду λ-матрицу

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}$$

двумя способами:

1. Методом элементарных преобразований.
2. Методом вычисления директоров и инвариантных множителей.

Решение.

1. $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \\ \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \end{bmatrix} \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 3\lambda & \lambda^2+5\lambda \\ 2\lambda^2 & \lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1/3\lambda^2+5/3\lambda \\ 2\lambda^2 & \lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \lambda & 1/3\lambda^2+5/3\lambda \\ 0 & \lambda^3-\lambda-2\lambda(1/3\lambda^2+5/3\lambda) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/3\lambda^3-10/3\lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda \end{bmatrix}.$$

2. $d_1(\lambda) = \text{НОД}\{\lambda(\lambda^2-1), \lambda(\lambda+5), 2\lambda^2, 3\lambda\} = \lambda$,
$d_2(\lambda) = \text{НОД}\{(\lambda^2+5\lambda)2\lambda^2 - (\lambda^3-\lambda)3\lambda\} =$
$\text{НОД}\{-\lambda^4+10\lambda^3+3\lambda^2\} = \lambda^4-10\lambda^3-3\lambda^2$,
$e_1(\lambda) = d_1(\lambda) = \lambda$,
$e_2(\lambda) = d_2(\lambda)/d_1(\lambda) = \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda$,
$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda \end{bmatrix}.$

5.3.4 Канонический вид специальных λ-матриц

Теорема. Если полиномы $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_s(\lambda)$ попарно взаимно просты, то имеет место следующая эквивалентность:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(\lambda) & & & 0 \\ & \varphi_2(\lambda) & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \varphi_s(\lambda) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \prod\limits_{k=1}^{s} \varphi_k(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Применим математическую индукцию по порядку матрицы s.

База индукции. $s = 2$. Так как $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda)$ взаимно просты, то существуют полиномы

$$u_1(\lambda), u_2(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}),$$

такие, что

$$\varphi_1(\lambda) \cdot u_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda) \cdot u_2(\lambda) = 1(\lambda) \quad (\text{полином } \equiv 1).$$

Далее достаточно рассмотреть последовательность эквивалентностей

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varphi_1(\lambda) & \varphi_1(\lambda)u_1(\lambda) \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \varphi_1(\lambda) & \varphi_1(\lambda)u_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)u_2(\lambda) \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varphi_1(\lambda) & 1 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \varphi_1(\lambda) \\ \varphi_2(\lambda) & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \varphi_1(\lambda) \\ 0 & -\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Расширение базы индукции. $s = 3$. Рассмотрим матрицу 3-го порядка с взаимнопростыми диагональными элементами $\varphi_j \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varphi_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1\varphi_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varphi_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varphi_1\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{array}\right] \sim^*$$

Так как три полинома φ_1, φ_2, φ_3 являются попарно взаимно простыми, то и два полинома $(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$, φ_3 тоже будут взаимно простыми, поэтому

$$\sim^* \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1\varphi_2\varphi_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1\varphi_2\varphi_3 \end{bmatrix}.$$

Индукционный переход. $(s-1) \longrightarrow s$.

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varphi_s \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_{s-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \varphi_s \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \prod\limits_{k=1}^{s-1} \varphi_k & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \varphi_s \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & \prod\limits_{k=1}^{s-1} \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varphi_s \end{array}\right] \sim^*$$

т.к. полиномы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ попарно взаимно просты,
то полиномы $(\prod\limits_{k=1}^{s-1} \varphi_k), \varphi_s$ тоже будут взаимно просты, поэтому

$$\sim^* \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \prod\limits_{k=1}^{s} \varphi_k \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \prod\limits_{k=1}^{s} \varphi_k \end{bmatrix}.$$

Теорема-дополнение. Пусть последовательность натуральных чисел $(i_1 \ i_2 \dots i_s)$ является перестановкой последовательности $(1 \ 2 \ \dots \ s)$, тогда

$$\begin{bmatrix} \varphi_{i_1}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_{i_2}(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_{i_s}(\lambda) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_s(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Чтобы в диагональной матрице поменять местами диагональные элементы a_{ii} и a_{jj}, достаточно поменять местами i-ю и j-ю строки, а затем поменять местами i-й и j-й столбцы.

5.4 Унимодулярные λ-матрицы

5.4.1 Определение и простые свойства

Определение. Матрица $A(\lambda)$ называется унимодулярной, если

$$A(\lambda) \sim E\,,$$

т.е. если все ее инвариантные множители и все директоры равны 1.

Критерий. Матрица унимодулярна тогда и только тогда, когда ее детерминант есть ненулевое число. Формально:

$$A(\lambda) \sim E \Longleftrightarrow \det A(\lambda) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\,.$$

Следствие. Всякая невырожденная числовая матрица есть унимодулярная λ-матрица.

Свойство. Произведение унимодулярных матриц унимодулярно, т.к. детерминант произведения равен произведению детерминантов.

Критерий. λ-матрица унимодулярна тогда и только тогда, когда существует обратная ей λ-матрица $A^{-1}(\lambda)$.

Доказательство необходимости. Из унимодулярности следует, что детерминант есть ненулевое число. Обратная матрица отыскивается через присоединенную и является λ-матрицей.

Доказательство достаточности. Пусть для λ-матрицы $A(\lambda)$ существует обратная $A^{-1}(\lambda)$, тогда

$$\underbrace{\det A(\lambda)}_{\deg=0} \cdot \underbrace{\det A^{-1}(\lambda)}_{\deg=0} = 1\,.$$

Следствие. Матрица, обратная к унимодулярной, сама унимодулярна.

5.4.2 Элементарные λ-матрицы

Определение. Элементарные λ-матрицы — это матрицы, получающиеся из единичной с помощью элементарных преобразований, т.е. это λ-матрицы следующих двух типов:

1. Получается из E умножением i-й строки (i-го столбца) на ненулевой множитель $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & \text{O} & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha_{ii} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \text{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} .$$

2. Получается из E прибавлением к i-й строке j-й строки, умноженной предварительно на любой полином $\varphi(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ (прибавлением к j-му столбцу i-го столбца, умноженного предварительно на любой полином $\varphi(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$):

$$\begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \dots & \dots & 1_{ii} & \dots & \varphi(\lambda) & \dots & \dots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1_{jj} & \dots & \dots \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{при} \quad i < j ,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \dots & \dots & 1_{jj} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \dots & \dots & \varphi(\lambda) & \dots & 1_{ii} & \dots & \dots \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{при} \quad i > j .$$

Понятно, что всякая элементарная матрица унимодулярна.

Матрицы, являющиеся обратными к элементарным λ-матрицам, сами являются элементарными λ-матрицами:

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & \text{O} & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha_{ii}^{-1} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \text{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \dots & \dots & 1_{ii} & \dots & -\varphi(\lambda) & \dots & \dots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1_{jj} & \dots & \dots \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{при} \quad i < j\,,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \dots & \dots & 1_{jj} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \dots & \dots & -\varphi(\lambda) & \dots & 1_{ii} & \dots & \dots \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{при} \quad i > j\,.$$

5.4.3 Сведение элементарных преобразований к матричному умножению

Умножение i-й строки матрицы $A(\lambda)$ на ненулевое число эквивалентно умножению матрицы $A(\lambda)$ слева на элементарную матрицу:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & \mathrm{O} & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha_{ii} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathrm{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot A(\lambda)\,.$$

Прибавление к i-й строке матрицы $A(\lambda)$ ее j-й строки, умноженной предварительно на полином $\varphi(\lambda)$, эквивалентно умножению матрицы $A(\lambda)$ слева на элементарную матрицу:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \dots & \dots & 1_{ii} & \dots & \varphi(\lambda) & \dots & \dots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1_{jj} & \dots & \dots \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & 1 \end{bmatrix} \cdot A(\lambda)\,.$$

Умножение i-го столбца матрицы $A(\lambda)$ на ненулевое число эквивалентно умножению матрицы $A(\lambda)$ справа на элементарную матрицу:

$$A(\lambda) \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & \mathrm{O} & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha_{ii} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathrm{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Прибавление к j-му столбцу матрицы $A(\lambda)$ ее i-го столбца, умноженного предварительно на полином $\varphi(\lambda)$, эквивалентно умножению матрицы $A(\lambda)$ справа на элементарную матрицу:

$$A(\lambda)\cdot\begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \dots & \dots & 1_{ii} & \dots & \varphi(\lambda) & \dots & \dots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1_{jj} & \dots & \dots \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & 1 \end{bmatrix}.$$

5.4.4 Критерий эквивалентности двух λ-матриц

Формулировка критерия. Две λ-матрицы n-го порядка $A(\lambda), B(\lambda)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют унимодулярные матрицы $U(\lambda), V(\lambda)$, такие, что

$$B(\lambda) = U(\lambda)\cdot A(\lambda)\cdot V(\lambda)\,.$$

Доказательство необходимости.

Пусть $A(\lambda)\sim B(\lambda)$, тогда от $A(\lambda)$ к $B(\lambda)$ можно перейти последовательностью элементарных преобразований, эквивалентных умножению на элементарные матрицы слева и справа:

$$B(\lambda) = \underbrace{U_k(\lambda)U_{k-1}(\lambda)\cdots U_1(\lambda)}_{\text{унимодулярная } U(\lambda)} A(\lambda) \underbrace{V_1(\lambda)\cdots V_{s-1}(\lambda)V_s(\lambda)}_{\text{унимодулярная} V(\lambda)}.$$

Следствие. (Еще один критерий унимодулярности.)

Матрица $W(\lambda)$ унимодулярна тогда и только тогда, когда она есть произведение элементарных матриц.

Действительно, $W(\lambda)\sim E$, поэтому согласно предыдущему
$W(\lambda) = U_k(\lambda)U_{k-1}(\lambda)\cdots U_1(\lambda)\cdot E\cdot V_1(\lambda)\cdots V_{s-1}(\lambda)V_s(\lambda) =$
$= U_k(\lambda)U_{k-1}(\lambda)\cdots U_1(\lambda)\cdot V_1(\lambda)\cdots V_{s-1}(\lambda)V_s(\lambda)$.

Доказательство достаточности.

Пусть $B(\lambda) = U(\lambda)\cdot A(\lambda)\cdot V(\lambda)$, где $U(\lambda), V(\lambda)$ унимодулярны, тогда (по предыдущему следствию) каждая из них есть произведение элементарных матриц; таким образом, $B(\lambda)$ получается из $A(\lambda)$ последовательностью строковых и столбцовых преобразований, т.е.

$$A(\lambda) \sim B(\lambda)\,.$$

5.5 Матричные полиномы

5.5.1 Основные определения и свойства

Определение. Матричным λ-полиномом порядка n над полем $\mathbb{F}$ называется выражение

$$A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \ \ldots \ + A_1\lambda + A_0\,,$$

а также матричнозначная функция переменного $\lambda \in \mathbb{F}$, задаваемая этим выражением, в котором A_i — это матрицы размера $n \times n$ над полем $\mathbb{F}$.

Свойство. Между λ-матрицами порядка n и матричными λ-полиномами порядка n существует взаимно однозначное соответствие.

Примеры. λ-матрицу $\left[\begin{array}{c|c} \lambda^4+6\lambda^3+1 & \lambda^2-1 \\ \hline \lambda^3+\lambda^2 & \lambda \end{array}\right]$ можно записать в виде матричного полинома

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^4 + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матричный полином $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ можно записать в виде λ-матрицы $\left[\begin{array}{c|c|c} \lambda^2+7 & 3\lambda & 2\lambda^2+1 \\ \hline 3\lambda & -3\lambda & -\lambda^2-2 \\ \hline 0 & \lambda^2+1 & 5\lambda \end{array}\right]$.

Вывод-определение. По сути, возникает новое понятие, которое мы в этих лекциях обозначим термином <u>λ-объект</u>. Каждый λ-объект может быть представлен (записан) в двух формах: в форме λ-матрицы над $\mathbb{F}$ и в форме матричного λ-полинома над $\mathbb{F}$.

Доказательному уточнению и углублению этого вывода-определения посвящен следующий пункт.

5.5.2 Изоморфизм двух колец

Теорема. Между кольцом λ-матриц порядка n и кольцом матричных λ-полиномов порядка n существует (канонический) изоморфизм, т.е. такое взаимно однозначное соответствие, при котором:

1. Сумме λ-матриц соответствует сумма матричных λ-полиномов (с теми же числовыми коэффициентами).

2. Произведению λ-матрицы на элемент поля соответствует произведение матричного λ-полинома на тот же элемент поля (с теми же числовыми коэффициентами).

3. Произведению двух λ-матриц соответствует произведение двух матричных λ-полиномов (с теми же числовыми коэффициентами).

См. два предыдущих примера.

Доказательство. Рассмотрим два λ-объекта и их представления λ-матрицами и матричными полиномами, выравнив предварительно формальные степени полиномов обеих матриц:

$$\begin{aligned}
C(\lambda) &= [c_{ij}^0 + c_{ij}^1\lambda + c_{ij}^2\lambda^2 + \,\ldots\, + c_{ij}^k\lambda^k]_{n\times n} = \\
&= [c_{ij}^0]_{n\times n} + [c_{ij}^1]_{n\times n}\lambda + [c_{ij}^2]_{n\times n}\lambda^2 + \,\ldots\, + [c_{ij}^k]_{n\times n}\lambda^k = C(\lambda)\,, \\
A(\lambda) &= [a_{ij}^0 + a_{ij}^1\lambda + a_{ij}^2\lambda^2 + \,\ldots\, + a_{ij}^k\lambda^k]_{n\times n} = \\
&= [a_{ij}^0]_{n\times n} + [a_{ij}^1]_{n\times n}\lambda + [a_{ij}^2]_{n\times n}\lambda^2 + \,\ldots\, + [a_{ij}^k]_{n\times n}\lambda^k = A(\lambda)\,.
\end{aligned}$$

1. Покажем равенство суммы двух λ-матриц сумме соответствующих матричных полиномов:

$$C(\lambda) + A(\lambda) =$$

$$\begin{aligned}
&= [c_{ij}^0 + c_{ij}^1\lambda + c_{ij}^2\lambda^2 + \,\ldots\, + c_{ij}^k\lambda^k]_{n\times n} + \\
&\qquad + [a_{ij}^0 + a_{ij}^1\lambda + a_{ij}^2\lambda^2 + \,\ldots\, + a_{ij}^k\lambda^k]_{n\times n} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [c_{ij}^0 + c_{ij}^1\lambda + c_{ij}^2\lambda^2 + \ldots + c_{ij}^k\lambda^k + a_{ij}^0 + a_{ij}^1\lambda + a_{ij}^2\lambda^2 + \ldots + a_{ij}^k\lambda^k]_{n\times n} = \\
&= [(c_{ij}^0 + a_{ij}^0) + (c_{ij}^1 + a_{ij}^1)\lambda + (c_{ij}^2 + a_{ij}^2)\lambda^2 + \,\ldots\, + (c_{ij}^k + a_{ij}^k)\lambda^k]_{n\times n} = \\
&= [(c_{ij}^0 + a_{ij}^0)] + [(c_{ij}^1 + a_{ij}^1)\lambda] + [(c_{ij}^2 + a_{ij}^2)\lambda^2] + \,\ldots\, + [(c_{ij}^k + a_{ij}^k)\lambda^k] = \\
&= [c_{ij}^0] + [a_{ij}^0] + ([c_{ij}^1] + [a_{ij}^1])\lambda + ([c_{ij}^2] + [a_{ij}^2])\lambda^2 + \ldots + ([c_{ij}^k] + [a_{ij}^k])\lambda^k =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left([c_{ij}^0] + [c_{ij}^1]\lambda + [c_{ij}^2]\lambda^2 + \,\ldots\, + [c_{ij}^k]\lambda^k\right) + \\
&\qquad + \left([a_{ij}^0] + [a_{ij}^1]\lambda + [a_{ij}^2]\lambda^2 + \,\ldots\, + [a_{ij}^k]\lambda^k\right) =
\end{aligned}$$

$$= C(\lambda) + A(\lambda)\,.$$

2. Покажем равенство произведения λ-матрицы и скаляра h произведению соответствующего матричного полинома и того же скаляра:

$$h \cdot C(\lambda) =$$

$$= h \cdot [c_{ij}^0 + c_{ij}^1\lambda + c_{ij}^2\lambda^2 + \ldots + c_{ij}^k\lambda^k]_{n\times n} =$$

$$= [h \cdot c_{ij}^0 + h \cdot c_{ij}^1\lambda + h \cdot c_{ij}^2\lambda^2 + \ldots + h \cdot c_{ij}^k\lambda^k]_{n\times n} =$$
$$= h \cdot [c_{ij}^0] + h \cdot [c_{ij}^1]\lambda + h \cdot [c_{ij}^2]\lambda^2 + \ldots + h \cdot [c_{ij}^k]\lambda^k =$$

$$= h \cdot \big([c_{ij}^0] + [c_{ij}^1]\lambda + [c_{ij}^2]\lambda^2 + \ldots + [c_{ij}^k]\lambda^k\big) =$$
$$= h \cdot C(\lambda)\,.$$

3. Покажем равенство произведения двух λ-матриц произведению соответствующих им матричных полиномов (некоторые знаки произведений будем иногда опускать):

$$C(\lambda) \cdot A(\lambda) =$$

$$= [c_{ij}^0{+}c_{ij}^1\lambda{+}c_{ij}^2\lambda^2{+}\ldots{+}c_{ij}^k\lambda^k]_{n\times n} \cdot [a_{ij}^0{+}a_{ij}^1\lambda{+}a_{ij}^2\lambda^2{+}\ldots{+}a_{ij}^k\lambda^k]_{n\times n} =$$

$$= \Bigg[\sum_{j=1}^n \Big((c_{ij}^0 + c_{ij}^1\lambda + c_{ij}^2\lambda^2 + \ldots + c_{ij}^k\lambda^k) \times$$
$$\times (a_{js}^0 + a_{js}^1\lambda + a_{js}^2\lambda^2 + \ldots + a_{js}^k\lambda^k)\Big)\Bigg]_{n\times n} =$$

$$= \Bigg[\sum_{j=1}^n \Big(c_{ij}^0a_{js}^0 + (c_{ij}^0a_{js}^1 + c_{ij}^1a_{js}^0)\lambda + (c_{ij}^0a_{js}^2 + c_{ij}^1a_{js}^1 + c_{ij}^2a_{js}^0)\lambda^2 + \ldots$$
$$\ldots + (c_{ij}^0a_{js}^r + c_{ij}^1a_{js}^{r-1} + \ldots + c_{ij}^ra_{js}^0)\lambda^r + \ldots + (c_{ij}^ka_{js}^k)\lambda^{2k}\Big)\Bigg]_{n\times n} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^n c_{ij}^0a_{js}^0\right] + \left[\sum_{j=1}^n (c_{ij}^0a_{js}^1 + c_{ij}^1a_{js}^0)\lambda\right] +$$
$$+ \left[\sum_{j=1}^n (c_{ij}^0a_{js}^2 + c_{ij}^1a_{js}^1 + c_{ij}^2a_{js}^0)\lambda^2\right] + \ldots$$
$$\ldots + \left[\sum_{j=1}^n (c_{ij}^0a_{js}^r + c_{ij}^1a_{js}^{r-1} + \ldots + c_{ij}^ra_{js}^0)\lambda^r\right] + \ldots$$
$$\ldots + \left[\sum_{j=1}^n (c_{ij}^ka_{js}^k)\lambda^{2k}\right] =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^n c_{ij}^0a_{js}^0\right] + \left[\sum_{j=1}^n (c_{ij}^0a_{js}^1 + c_{ij}^1a_{js}^0)\right]\lambda +$$

$$+ \left[\sum_{j=1}^{n} (c_{ij}^0 a_{js}^2 + c_{ij}^1 a_{js}^1 + c_{ij}^2 a_{js}^0) \right] \lambda^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left[\sum_{j=1}^{n} (c_{ij}^0 a_{js}^r + c_{ij}^1 a_{js}^{r-1} + \ldots + c_{ij}^r a_{js}^0) \right] \lambda^r + \ldots$$

$$\ldots + \left[\sum_{j=1}^{n} (c_{ij}^k a_{js}^k) \right] \lambda^{2k} =$$

$$= [c_{ij}^0][a_{js}^0] + \left([c_{ij}^0][a_{js}^1] + [c_{ij}^1][a_{js}^0]\right) \lambda +$$

$$+ \left([c_{ij}^0][a_{js}^2] + [c_{ij}^1][a_{js}^1] + [c_{ij}^2][a_{js}^0]\right) \lambda^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left([c_{ij}^0][a_{js}^r] + [c_{ij}^1][a_{js}^{r-1}] + \ldots + [c_{ij}^r][a_{js}^0]\right) \lambda^r + \ldots$$

$$\ldots + \left([c_{ij}^k][a_{js}^k]\right) \lambda^{2k} =$$

$$= \left([c_{ij}^0] + [c_{ij}^1]\lambda + [c_{ij}^2]\lambda^2 + \ldots + [c_{ij}^k]\lambda^k\right) \times$$

$$\times \left([a_{ij}^0] + [a_{ij}^1]\lambda + [a_{ij}^2]\lambda^2 + \ldots + [a_{ij}^k]\right) \lambda^k =$$

$$= C(\lambda) \cdot A(\lambda)\,.$$

5.5.3 Отличие λ-матриц и матричных полиномов

Важное отличие λ-матриц и матричных полиномов заключается в области допустимых значений их аргументов:

- ОДЗ аргумента λ для λ-матриц — поле $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$;
- ОДЗ аргумента λ для матричного полинома n-го порядка — кольцо квадратных матриц n-го порядка над $\mathbb{F}$.

Выбор того или иного представления введенного нами λ-объекта в основном диктуется соображениями удобства проводимых выкладок и вычислений. (Ср. с различными формами записи комплексного числа.)

5.5.4 Деление матричных полиномов с остатком

Определение. Пусть

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_s\lambda^k + B_{s-1}\lambda^{s-1} + \ldots + B_1\lambda + B_0, \qquad \det B_s \neq 0,$$

тогда найдутся единственные матричные полиномы

$$Q_1(\lambda), \quad R_1(\lambda), \quad Q_2(\lambda), \quad R_2(\lambda)\,,$$

такие, что

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_1(\lambda) + R_1(\lambda), \qquad \text{деление слева,} \tag{$*$}$$

$$A(\lambda) = Q_2(\lambda)B(\lambda) + R_2(\lambda), \qquad \text{деление справа,} \tag{$**$}$$

причем

$$\deg R_1(\lambda) < \deg B(\lambda), \quad \text{если } R_1 \not\equiv 0,$$

$$\deg R_2(\lambda) < \deg B(\lambda), \quad \text{если } R_2 \not\equiv 0.$$

Доказательство существования для $(*)$. Если $s > k$, то $A(\lambda) = B(\lambda) \cdot O(\lambda) + A(\lambda)$, если же $k \geq s$, то положим

$$r_1(\lambda) = A(\lambda) - B(\lambda)(B_s^{-1}A_k)\lambda^{k-s}, \qquad \deg r_1(\lambda) = k_1 \leq k-1.$$

Если $s > k_1$, то $A(\lambda) = B(\lambda)B_s^{-1}A_k\lambda^{k-s} + r_1(\lambda)$, если же $k_1 \geq s$, то положим

$$r_2(\lambda) = r_1(\lambda) - B(\lambda)(B_s^{-1}\tilde{A}_{k_1})\lambda^{k_1-s}, \qquad \deg r_2(\lambda) = k_2 \leq k_1 - 1\,.$$

И т.д.

Доказательство единственности. Рассмотрим два равенства

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_1(\lambda) + R_1(\lambda), \qquad \text{деление слева,} \qquad \deg B > \deg R_1,$$

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_1^o(\lambda) + R_1^o(\lambda), \qquad \text{деление слева,} \qquad \deg B > \deg R_1^o\,,$$

$$\deg B > \deg[R_1 - R_1^o]\,.$$

Вычтем почленно и слегка преобразуем

$$B(\lambda) \cdot [Q_1^o(\lambda) - Q(\lambda)] = [R_1(\lambda) - R_1^o(\lambda)]\,.$$

Рассмотрим баланс степеней левой и правой частей:
если $[Q_1^o(\lambda) - Q(\lambda)] \not\equiv 0$, то $\deg[R_1(\lambda) - R_1^o(\lambda)] \geq \deg B(\lambda)$, но это не так, поэтому

$$[Q_1^o(\lambda) - Q(\lambda)] \equiv 0\,,$$

но тогда и

$$[R_1(\lambda) - R_1^o(\lambda)] \equiv 0\,.$$

5.6 Подобие числовых матриц

5.6.1 Определение

Мы уже знаем, что числовые квадратные матрицы A, B называются подобными, если существует невырожденная матрица R такая, что

$$B = R^{-1} \cdot A \cdot R.$$

Имея ввиду эту формулу, говорят, что матрица B получена из матрицы A трансформированием матрицей R.

С точки зрения матричных уравнений речь идет о разрешимости и решении матричного уравнения

$$B = X^{-1} A X\,,$$

вся сложность которого связана с некоммутативностью матричного умножения.

Замечание. Если матрицы A и B подобны, то трансформирующая матрица отнюдь не единственна, например, E подобна E и трансформирующей является любая невырожденная матрица R:

$$E = R^{-1} \cdot E \cdot R\,.$$

5.6.2 Критерий подобия числовых матриц

Теорема. Квадратные матрицы A, B с элементами из числового поля $\mathbb{F}$ подобны тогда и только тогда, когда их характеристические матрицы

$$(A - \lambda E), \quad (B - \lambda E)$$

(а они суть λ-матрицы) эквивалентны. (Проблема эквивалентности нами уже изучена.)

Замечание. Критерий хорош и полезен практически, т.к. проблема эквивалентности двух λ-матриц решается вполне эффективно.

Доказательство необходимости. Пусть матрицы A, B подобны, т.е. $B = R^{-1} A R$, тогда

$$(B - \lambda E) = (R^{-1} A R - \lambda E) = (R^{-1} A R - R^{-1} \lambda E R) = R^{-1} (A - \lambda E) R\,.$$

Но невырожденные числовые матрицы R^{-1}, R суть унимодулярные λ-матрицы, поэтому

$$(B - \lambda E) \sim (A - \lambda E)\,.$$

Доказательство достаточности. Пусть $(B - \lambda E) \sim (A - \lambda E)$, т.е. существуют унимодулярные матрицы $U(\lambda), V(\lambda)$, такие, что

$$(B - \lambda E) = U(\lambda)(A - \lambda E)V(\lambda)\,. \qquad (*)$$

Для унимодулярных матриц $U(\lambda), V(\lambda)$ обратные матрицы $U^{-1}(\lambda)$, $V^{-1}(\lambda)$ существуют и являются унимодулярными λ-матрицами, поэтому из $(*)$ следует еще

$$U^{-1}(\lambda)(B - \lambda E)V^{-1}(\lambda) = (A - \lambda E). \qquad (**)$$

Применим теперь к парам матриц $U(\lambda), (B - \lambda E)$ и $V(\lambda), (B - \lambda E)$ алгоритм деления с остатком:

$U(\lambda) = (B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1$, деление слева, R_1 — числовая матрица,

$V(\lambda) = Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2$, деление справа, R_2 — числовая матрица,

Понятно, что

$$R_1 = U(\lambda) - (B - \lambda E)Q_1(\lambda)\,, \qquad (***)$$

$$R_2 = V(\lambda) - Q_2(\lambda)(B - \lambda E)\,. \qquad (****)$$

Вычислим теперь произведение

$$\begin{aligned}
&R_1[A-\lambda E]R_2 = (U(\lambda)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda))\cdot[A-\lambda E]\cdot(V(\lambda)-Q_2(\lambda)(B-\lambda E)) = \\
&= (U(\lambda)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda))\cdot[U^{-1}(\lambda)(B-\lambda E)V^{-1}(\lambda)]\cdot(V(\lambda)-Q_2(\lambda)(B-\lambda E)) = \\
&= [(U(\lambda)-(B-\lambda E)Q_1)\cdot U^{-1}(\lambda)](B-\lambda E)[V^{-1}(\lambda)\cdot(V(\lambda)-Q_2(B-\lambda E))] = \\
&= \{[E-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda)]\cdot(B-\lambda E)\}\cdot\{E-V^{-1}(\lambda)\cdot Q_2(\lambda)(B-\lambda E)\} = \\
&= (B-\lambda E)\{E-Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda)(B-\lambda E)\}\{E-V^{-1}(\lambda)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)\} = \\
&= (B-\lambda E)\{E+[-Q_1U^{-1}-V^{-1}Q_2+Q_1U^{-1}(B-\lambda E)V^{-1}Q_2](B-\lambda E)\}.
\end{aligned}$$

Здесь при переходе от 4-й строки к 5-й строке использовано известное матричное тождество

$$(E - ST)S = S(E - TS).$$

Далее из баланса степеней самой первой и самой последней формул цепочки равенств вытекает, что все выражение, стоящее в квадратной скобке, тождественно равно нулю; но тогда

$$R_1(A - \lambda E)R_2 = (B - \lambda E),$$

что эквивалентно паре матричных равенств

$$\begin{cases} R_1AR_2 = B \\ -R_1ER_2 = -E \Leftrightarrow R_1R_2 = E. \end{cases}$$

Таким образом, R_1, R_2 — две взаимно обратные матрицы, поэтому

$$R_2^{-1}AR_2 = B,$$

т.е. матрицы A и B подобны.

5.6.3 Вычисление остатка от деления справа

Вычислить остаток R_2 можно исходя непосредственно из $(****)$, выбрав в качестве аргумента матрицу B : если $V(\lambda) = Q_2(\lambda)(B - \lambda E) + R_2$, т.е. $R_2 = V(\lambda) - Q_2(\lambda)(B - \lambda E)$, то

$$R_2 = V(B).$$

5.6.4 Нахождение трансформирующей матрицы

Концентрируем изложенный выше материал.

Алгоритм. Установить существование и вычислить трансформирующую матрицу R из уравнения $B = R^{-1} \cdot A \cdot R$, можно так:

1. Для матриц A и B составить их характеристические матрицы, т.е. λ-матрицы $(A - \lambda E)$ и $(B - \lambda E)$.
2. Устанавить эквивалентность или неэквивалентность этих полиномиальных λ-матриц, и если они эквивалентны (матрица R существует), то перейти к следующему шагу алгоритма.
3. Совершить реальное преобразование $(A - \lambda E)$ в $(B - \lambda E)$.
4. Последовательность столбцовых преобразований записать в виде произведения элементарных матриц.

   {В результате получится интересующая нас матрица $V(\lambda)$.}
5. Найти трансформирующую матрицу R по формуле

$$R = R_2 = V(B).$$

6 Жорданова нормальная форма матрицы

6.1 Жордановы матрицы и их свойства

6.1.1 Жордановы клетки

Определение. Жордановой клеткой порядка k, относящейся к числу λ_0, называется числовая матрица, имеющая на главной диагонали число λ_0, в ленточке над главной диагональю число 1, а все прочие элементы равны нулю:

$$
\begin{bmatrix}
\lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0
\end{bmatrix}_{k\times k}.
$$

Вот жорданова клетка 1-го порядка, относящаяся к числу λ_0:

$$
\begin{bmatrix} \lambda_0 \end{bmatrix}.
$$

Вот жорданова клетка 2-го порядка, относящаяся к числу λ_0:

$$
\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}.
$$

Вот жорданова клетка 3-го порядка, относящаяся к числу λ_0:

$$
\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}.
$$

6.1.2 Жордановы матрицы

Определение. Жордановой матрицей порядка n называется квадратная треугольная матрица, состоящая из жордановых клеток, расположенных на диагонали согласно следующей схеме (пустые клетки заполнены нулями):

$$
J = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
J_1 & & & \\
\hline
 & J_2 & & \\
\hline
 & & \ddots & \\
\hline
 & & & J_s \\
\hline
\end{array}.
$$

Матрица будет жордановой тогда и только тогда, когда она имеет следующий вид:

$$
\begin{bmatrix}
\lambda_1 & \varepsilon_1 & & & & \\
 & \lambda_2 & \varepsilon_2 & & & \\
 & & \lambda_3 & \varepsilon_3 & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & \lambda_{n-1} & \varepsilon_{n-1} \\
 & & & & & \lambda_n
\end{bmatrix},
$$

где $\varepsilon_j = 0$ или $\varepsilon_j = 1$, причем

$$\text{если } \varepsilon_j = 1, \text{ то } \lambda_{j+1} = \lambda_j \; .$$

6.1.3 Канонический вид характеристической матрицы для жордановой клетки

Характеристическая матрица жордановой клетки является λ-матрицей и имеет простой вид:

$$J - \lambda E_k = \begin{bmatrix} (\lambda_0 - \lambda) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_0 - \lambda) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_0 - \lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (\lambda_0 - \lambda) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (\lambda_0 - \lambda) \end{bmatrix}_{k \times k} .$$

Найдем директоры этой λ-матрицы:

1. $\det(J - \lambda E) = (\lambda_0 - \lambda)^k$; старший коэффициент $= (-1)^k$, поэтому
$$d_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k .$$
2. Среди миноров $(k-1)$-го порядка существует минор, равный 1: $(\det(J - \lambda E)_{k1} = 1)$; поэтому
$$d_{k-1}(\lambda) = 1 \, .$$
3. При каждом фиксированном j среди миноров $(k-j)$-го порядка существует равный 1, поэтому
$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \, \dots \, = d_{k-2}(\lambda) = d_{k-1}(\lambda) = 1 \, .$$

По найденным директорам легко вычисляются инвариантные множители нашей λ-матрицы:

$$e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = \, \dots \, = e_{k-2}(\lambda) = e_{k-1}(\lambda) = 1, \qquad e_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \, .$$

Таким образом, канонической формой для λ-матрицы $(J - \lambda E)$ является диагональная матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & (\lambda - \lambda_0)^k \end{bmatrix}_{k \times k} . \qquad (*)$$

6.1.4 Канонический вид характеристической матрицы $J - \lambda E$ для жордановой матрицы J

Характеристическая матрица для J имеет вид

$$J - \lambda E = \begin{bmatrix} [J_1 - \lambda E_1] & & & & \\ & [J_2 - \lambda E_2] & & & \\ & & [J_3 - \lambda E_3] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [J_s - \lambda E_s] \end{bmatrix} .$$

В каждой клетке символом E_k обозначена единичная матрица того же порядка, что и J_k.

Все жордановы клетки относятся к каким-то попарно различным числам, количество которых не более, чем количество клеток:

$$\lambda_1, \lambda_2, \, \ldots \, , \lambda_t \, , \qquad 1 \leq t \leq s \, .$$

К каждому конкретному числу λ_i может относиться одна или несколько жордановых клеток (их число q_i, $\quad i = 1, 2, \, \ldots \, , t$), порядки которых можно считать упорядоченными по убыванию:

$$k_{i1} \geq k_{i2} \geq k_{i3} \geq \, \ldots \, \geq k_{iq_i} \, .$$

Понятно, что $\sum\limits_{i=1}^{t} q_i = s$ — общее число жордановых клеток,
$\sum\limits_{i=1}^{t} \sum\limits_{j=1}^{q_i} k_{ij} = n$ — порядок матрицы J.

Приводя каждую клетку к каноническому виду $(*)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & (\lambda - \lambda_i)^{k_{ij}} \end{bmatrix}_{k_{ij} \times k_{ij}} , \qquad j = 1, 2, \, \ldots \, , q_i \, ,$$

мы тем самым приведем всю матрицу $(J - \lambda E)$ к диагональному виду, причем на главной диагонали стоят 1 и биномы вида

$$\begin{cases} (\lambda - \lambda_i)^{k_{ij}} , & \\ & i = 1, 2, \, \ldots \, , t \leq s \leq n, \\ & j = 1, 2, \, \ldots \, , q_i. \end{cases}$$

Биномы будут стоять на некоторых однозначно определяемых местах, но нас эти места не интересуют, т.к. элементарными преобразованиями (строчечными и столбцовыми) в диагональной матрице можно поменять местами любые диагональные элементы. Поэтому $J - \lambda E \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{1q_1}} \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} (\lambda-\lambda_t)^{k_{t1}} & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda-\lambda_t)^{k_{tq_t}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Сделаем еще одно эквивалентное преобразование, собирая в блоки множители с различными λ_i и располагая их по величине порядка сверху вниз (слева направо). Теперь $J - \lambda E \sim$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}} & & & \\ & (\lambda-\lambda_2)^{k_{21}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda-\lambda_t)^{k_{t1}} \end{bmatrix} & & \\ & & \begin{bmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{k_{12}} & & & \\ & (\lambda-\lambda_2)^{k_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda-\lambda_t)^{k_{t2}} \end{bmatrix} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Всего диагональных неединичных блоков будет $q = \max\{q_1, q_2, \ldots, q_t\}$.

Запись последней матрицы нужно понимать в некоторых позициях не буквально, а условно:

0-й блок (единичную матрицу левого верхнего угла) — условно, т.к. он может и отсутствовать.

1-й блок — буквально (т.к. все $k_{j1} \neq 0$).

2-й блок — условно: если $k_{j2} = 0$, то элемент $(\lambda - \lambda_j)^{k_{j2}}$ фактически отсутствует.

$\vdots$

r-й блок — условно: если $k_{jr} = 0$, то элемент $(\lambda - \lambda_j)^{k_{jr}}$ фактически отсутствует.

$\vdots$

Если $k_{jr} = 0$, то $k_{j(r+1)} = 0$.

Всего диагональных блоков, не считая единичного блока, будет фактически

$$q = \max\{q_1, q_2, \ldots, q_t\} = q_m, \qquad m \in \{1, 2, \ldots, t\}.$$

Применяя к каждому диагональному блоку 1-ю теорему о каноническом виде специальных λ-матриц, получим $J - \lambda E \sim$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \prod\limits_{i=1}^{t} (\lambda - \lambda_i)^{k_{i1}} \end{bmatrix} & & & \\ & & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \prod\limits_{i=1}^{t} (\lambda - \lambda_i)^{k_{i2}} \end{bmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \prod\limits_{i=1}^{t} (\lambda - \lambda_i)^{k_{iq}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

В этой матрице для
$$\nu < \mu$$
$$\deg \prod_{i=1}^{t} (\lambda - \lambda_i)^{k_{i\nu}} \geq \deg \prod_{i=1}^{t} (\lambda - \lambda_i)^{k_{i\mu}} ,$$
и если $\quad k_{i\mu} \neq 0, \quad$ то $\quad k_{i\nu} \geq k_{i\mu} \neq 0$.

Еще раз меняя местами диагональные элементы λ -матрицы, получим **канонический** вид матрицы $J - \lambda E$:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \prod\limits_{i=1}^{t} (\lambda - \lambda_i)^{k_{iq}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \prod\limits_{i=1}^{t} (\lambda - \lambda_i)^{k_{i2}} \\ & & & & & & & \prod\limits_{i=1}^{t} (\lambda - \lambda_i)^{k_{i1}} \end{bmatrix} .$$

6.1.5 Таблица диагональных множителей

Выпишем друг под другом **все** неединичные сомножители **каждого** произведения, начиная с самого нижнего:

$$\begin{array}{llllll} (\lambda - \lambda_1)^{k_{11}} & (\lambda - \lambda_1)^{k_{12}} & \ldots & \ldots\ldots\ldots & (\lambda - \lambda_1)^{k_{1q_1}} & \\ (\lambda - \lambda_2)^{k_{21}} & (\lambda - \lambda_2)^{k_{22}} & \ldots & (\lambda - \lambda_2)^{k_{2q_2}} & & \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ (\lambda - \lambda_m)^{k_{m1}} & (\lambda - \lambda_m)^{k_{m2}} & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & (\lambda - \lambda_m)^{k_{mq_m}} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ (\lambda - \lambda_t)^{k_{t1}} & (\lambda - \lambda_t)^{k_{t2}} & \ldots & (\lambda - \lambda_t)^{k_{tq_t}} ; & & \end{array}$$

в первом столбце фактически присутствуют все выписанные сомножители, во всех остальных — с точностью до нулевых степеней.

Но такую таблицу можно составить сразу по виду жордановой матрицы, а потому можно весьма быстро привести характеристическую матрицу $J - \lambda E$ жордановой матрицы J к каноническому виду.

Пример. Привести характеристическую матрицу жордановой матрицы к каноническому виду:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} & & & & & & & \\ & [7] & & & & & & \\ & & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} & & & & & \\ & & & [7] & & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{bmatrix} & & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ & 5 & 1 & 0 \\ & & 5 & 1 \\ & & & 5 \end{bmatrix} & & \\ & & & & & & \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ & 5 \end{bmatrix} & \end{bmatrix}_{16\times 16}.$$

Выпишем все различные собственные числа матрицы:

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 5; \qquad \text{т.о.}, \, t = 3\,.$$

Составим таблицу диагональных множителей:

$$\begin{array}{ccc} (\lambda-7) & (\lambda-7) & \\ (\lambda-3)^3 & (\lambda-3)^3 & (\lambda-3)^2 \\ (\lambda-5)^4 & (\lambda-5)^2\,. & \end{array}$$

Выпишем последовательность инвариантных множителей:
$e_{16} = (\lambda-7)(\lambda-3)^3(\lambda-5)^4$,
$e_{15} = (\lambda-7)(\lambda-3)^3(\lambda-5)^2$,
$e_{14} = (\lambda-3)^2$,
$e_{13} = \ldots = e_1 = 1$.
Вот каноническая форма характеристической матрицы заданной жорда-

новой матрицы:

$$\begin{bmatrix} [1] &&&&&&&&&&&&&&& \\ & [1] &&&&&&&&&&&&&& \\ && [1] &&&&&&&&&&&&& \\ &&& [1] &&&&&&&&&&&& \\ &&&& [1] &&&&&&&&&&& \\ &&&&& [1] &&&&&&&&&& \\ &&&&&& [1] &&&&&&&&& \\ &&&&&&& [1] &&&&&&&& \\ &&&&&&&& [1] &&&&&&& \\ &&&&&&&&& [1] &&&&&& \\ &&&&&&&&&& [1] &&&&& \\ &&&&&&&&&&& [1] &&&& \\ &&&&&&&&&&&& [1] &&& \\ &&&&&&&&&&&&& [(\lambda-3)^2] && \\ &&&&&&&&&&&&&& [(\lambda-3)^3(\lambda-5)^2(\lambda-7)] & \\ &&&&&&&&&&&&&&& [(\lambda-3)^3(\lambda-5)^4(\lambda-7)] \end{bmatrix}_{16\times 16}.$$

6.1.6 Критерий подобия жордановых матриц

Формулировка критерия. Две жордановы матрицы подобны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же жордановых клеток, лишь расположенных, может быть, по-разному вдоль главной диагонали.

Доказательство необходимости. Инвариантные множители вполне определяются таблицей диагональных множителей, а эта таблица вполне определяется клетками жордановой матрицы.

Доказательство достаточности. По инвариантным множителям однозначно восстанавливается таблица диагональных множителей и сами жордановы клетки.

Замечание. Изложенной теории вполне достаточно для принципиального понимания материала, но вовсе недостаточно для уверенного владения этим материалом, т.е. для беглого ручного решения задач размерности 2, 3 и для программирования решения задач высокой размерности. Каждый студент должен прорешать почти все задачи этой темы из задачников [13, 17, 18].

Пример. По канонической форме характеристической матрицы

$$J-\lambda E \sim \begin{bmatrix} [1] &&&&&&&&&&& \\ & [1] &&&&&&&&&& \\ && [1] &&&&&&&&& \\ &&& [1] &&&&&&&& \\ &&&& [1] &&&&&&& \\ &&&&& [1] &&&&&& \\ &&&&&& [1] &&&&& \\ &&&&&&& [1] &&&& \\ &&&&&&&& [1] &&& \\ &&&&&&&&& [(\lambda-4)^2] && \\ &&&&&&&&&& [(\lambda-3)^2(\lambda-4)^2] & \\ &&&&&&&&&&& [(\lambda-3)^3(\lambda-5)(\lambda-4)^2] \end{bmatrix}_{12\times 12}$$

восстановить жорданову матрицу J.

Решение. Вот таблица диагональных множителей:

$$\begin{array}{lll} (\lambda-4)^2 & (\lambda-4)^2 & (\lambda-4)^2 \\ (\lambda-3)^3 & (\lambda-3)^2 & \\ (\lambda-5)\,. & & \end{array}$$

Вот матрица Жордана:

$$J = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ & 4 \end{bmatrix} &&&&& \\ & \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ & 4 \end{bmatrix} &&&& \\ && \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ & 4 \end{bmatrix} &&& \\ &&& \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 3 & 1 \\ && 3 \end{bmatrix} && \\ &&&& \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{bmatrix} & \\ &&&&& \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{12\times 12} .$$

6.1.7 Следствия (о диагональных матрицах)

Жорданова матрица, подобная диагональной матрице, сама является диагональной.

Две диагональные матрицы подобны тогда и только тогда, когда получаются друг из друга перестановкой диагональных элементов.

6.1.8 Заключительные замечания

Материал настоящего вопроса является теоретической основой приведения числовой матрицы к нормальной жордановой форме.

При практическом приведении матрицы к нормальной жордановой форме необходимо иметь ввиду следующее:

- Если числовая матрица A приводится к нормальной жордановой форме, то последняя определяется с точностью до порядка расположения клеток вдоль диагонали.

- Матрица A с элементами из поля $\mathbb{F}$ приводится над полем $\mathbb{F}$ к жордановой нормальной форме только если все корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ принадлежат $\mathbb{F}$.

6.1.9 Пример приведения числовой матрицы к нормальной жордановой форме

$$A = \begin{bmatrix} -16 & -17 & 87 & -108 \\ 8 & 9 & -42 & 54 \\ -3 & -3 & 16 & -18 \\ -1 & -1 & 6 & -8 \end{bmatrix};$$

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} (-16-\lambda) & -17 & 87 & -108 \\ 8 & (9-\lambda) & -42 & 54 \\ -3 & -3 & (16-\lambda) & -18 \\ -1 & -1 & 6 & (-8-\lambda) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} (-16-\lambda) & -17 & 87 & -108 \\ 8 & (9-\lambda) & -42 & 54 \\ -3 & -3 & (16-\lambda) & -18 \\ 1 & 1 & -6 & (8+\lambda) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} (-16-\lambda) & (-1+\lambda) & (-9-6\lambda) & (\lambda^2+16\lambda+8\lambda+20) \\ 8 & (1-\lambda) & 6 & (-10-8\lambda) \\ -3 & 0 & (-2-\lambda) & (6+3\lambda) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & (-1+\lambda) & (-9-6\lambda) & (\lambda^2+24\lambda+20) \\ 0 & (1-\lambda) & 6 & (-10-8\lambda) \\ 0 & 0 & (-2-\lambda) & (6+3\lambda) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & (\lambda-1) & 3 & (\lambda^2+6\lambda-16) \\ 0 & (-\lambda+1) & 6 & (-8\lambda-10) \\ 0 & 0 & (-\lambda-2) & (3\lambda+6) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & (6\lambda-6) & 3 & (6\lambda^2+36\lambda-96) \\ 0 & (-\lambda+1) & 1 & (-8\lambda-10) \\ 0 & 0 & (-\lambda-2) & (18\lambda+36) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & (9\lambda-9) & 0 & (6\lambda^2+60\lambda-66) \\ 0 & (-\lambda+1) & 1 & (-8\lambda-10) \\ 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 & (-8\lambda^2-8\lambda+16) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & (9\lambda-9) & 0 & (6\lambda^2+60\lambda-66) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 & (-8\lambda^2-8\lambda+16) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & (3\lambda-3) & 0 & (\lambda^2+10\lambda-11) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 & (-4\lambda^2-4\lambda+8) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & (\lambda-1) & 0 & (\lambda^2+10\lambda-11) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 & (-12\lambda^2-12\lambda+24) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & (\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3-3\lambda+2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & (\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \scriptstyle \lambda^3+10\lambda^2-11+2\lambda+2+20\lambda-22-12\lambda^2-12\lambda+24 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & (\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{bmatrix} .$$

Таблица диагональных множителей:

$$\begin{matrix} (\lambda-1)^2 & (\lambda-1) \\ (\lambda+2)\,. & \end{matrix}$$

Нормальная жорданова форма матрицы A такова:

$$\begin{bmatrix} [-2] & & \\ & [1] & \\ & & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} .$$

7 Аннулирующие полиномы

7.1 Минимальный полином

7.1.1 Матричный корень полинома

Пусть $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, т.е.

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ \ldots \ + a_k\lambda^k, \qquad a_j \in \mathbb{F}.$$

Такой полином задает матричную функцию с тем же именем f :

$$f : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{M}_n \,,$$

$$f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \ \ldots\ + a_kA^k, \qquad A_{n\times n} \in \mathcal{M}_n\,.$$

Определение. Матричный корень полинома f — это всякая матрица $A_{n\times n}$, такая, что

$$f(A_{n\times n}) = O_{n\times n}\,.$$

Говорят: полином f аннулируется матрицей A [10, с. 388].
Говорят: матрица A аннулируется полином f [8, с. 87].

7.1.2 Теорема существования аннулирующего полинома

Теорема. Всякая квадратная матрица $A_{n\times n}$ является корнем некоторого ненулевого полинома, т.е. для всякой матрицы $A_{n\times n}$ существует аннулирующий полином.

Доказательство. Установим биекцию (взаимно однозначное соответствие) между матрицами $A_{n\times n}$ и столбцами из $\mathbb{F}^{n^2}$:

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \\ \hline a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{n2} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{array}\right].$$

Столбец, соответствующий матрице A, обозначим (только в построениях и выводах этого вопроса) через $\vec{A}$.

Для произвольной квадратной матрицы A рассмотрим последовательность ее степеней

$$E,\ A,\ A^2,\ A^3, \ldots , A^n, \ldots , A^{n^2}$$

и последовательность соответствующих столбцов

$$\underbrace{\vec{E},\ \vec{A},\ \vec{A}^2,\ \vec{A}^3,\ \dots,\vec{A}^n,\ \dots,\vec{A}^{n^2}}_{(n^2+1)\ \text{столбец высоты}\ n^2}.$$

Так как число столбцов больше их высоты, эти столбцы ЛЗ, т.е.

$\exists\,(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n^2})$ — ненулевой набор: $\qquad \alpha_0\vec{E}+\alpha_1\vec{A}+\ldots+\alpha_{n^2}\vec{A}^{n^2}=\vec{O}\,.$

Переходя к соответствующим матрицам, получим, что

$\exists\,(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n^2})$ — ненулевой набор: $\qquad \alpha_0 E+\alpha_1 A+\ldots+\alpha_{n^2}A^{n^2}=O\,,$

т.е. действительно существует полином

$$f(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\ \ldots\ +\alpha_{n^2}\lambda^{n^2},$$

аннулирующий матрицу A.

7.1.3 Минимальный полином и его единственность

Среди множества всех аннулирующих полиномов рассмотрим те, старший коэффициент которых равен 1, а среди них аннулирующий полином **минимальной степени** — это так называемый **минимальный полином матрицы**.

Минимальный полином матрицы единствен. Действительно, если предположить существование хотя бы двух минимальных полиномов

$$\varphi_1(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\ \ldots\ +\lambda^m,$$

$$\varphi_2(\lambda)=\beta_0+\beta_1\lambda+\ \ldots\ +\lambda^m,$$

то их разность $\varphi(\lambda)$ либо $\equiv 0$, либо вновь является аннулирующим полиномом степени $\deg\varphi<m$, что противоречит выбору φ_1,φ_2, следовательно, $\varphi(\lambda)\equiv 0$, т.е. $\varphi_1(\lambda)\equiv\varphi_2(\lambda)$.

7.1.4 Кратность аннулирующего полинома минимальному

Теорема. Всякий аннулирующий полином делится без остатка на минимальный.

Доказательство. Пусть f — аннулирующий полином матрицы A, пусть φ — минимальный полином матрицы A, тогда

$$f(A) = \varphi(A) = O_{n\times n}, \quad \deg\varphi \le \deg f.$$

Сделаем простые выкладки:

$$f(\lambda) = \psi(\lambda)\cdot\varphi(\lambda) + r(\lambda), \qquad \deg r < \deg\varphi;$$

$$f(A) = O_{n\times n},\ \varphi(A) = O_{n\times n} \implies r(A) = O_{n\times n} \implies r(\lambda) \equiv 0,$$

поэтому

$$f(\lambda) = \psi(\lambda)\cdot\varphi(\lambda).$$

7.2 Минимальный полином как инвариантный множитель; теорема Гамильтона–Кэли

7.2.1 Инвариантный множитель $e_n(\lambda)$ есть аннулирующий полином

Теорема. Для всякой квадратной матрицы A инвариантный множитель $e_n(\lambda)$ ее характеристической матрицы $(A-\lambda E)$ является аннулирующим полиномом матрицы A, т.е. $e_n(A) = O$.

Доказательство. Запишем инвариантный множитель в виде отношения двух директоров:

$$e_n(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} = \frac{\det(\lambda E - A)}{d_{n-1}(\lambda)} = \frac{(-1)^n\det(A-\lambda E)}{d_{n-1}(\lambda)},$$

понятно, что

$$(-1)^n\cdot\det(A-\lambda E) = d_{n-1}(\lambda)\cdot e_n(\lambda) \not\equiv 0.$$

Пусть $B(\lambda) = (A-\lambda E)^c$ есть союзная (присоединенная) матрица матрицы $(A-\lambda E)$. Она состоит из миноров $(n-1)$-го порядка транспонированной матрицы и удовлетворяет соотношению

$$(A-\lambda E)\cdot B(\lambda) = \det(A-\lambda E)\cdot E = \begin{bmatrix} \det(A-\lambda E) & & & \\ & \det(A-\lambda E) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \det(A-\lambda E) \end{bmatrix}.$$

И т.к. $B(\lambda)$ состоит из миноров $(n-1)$-го порядка матрицы $(A-\lambda E)$, каждый из которых кратен $d_{n-1}(\lambda)$, ее можно представить в виде

$$B(\lambda) = d_{n-1}(\lambda) \cdot C(\lambda),$$

причем ННОД $\{c_{ij}(\lambda)\} = 1$.

Из трех последних равенств можно получить следующее соотношение:

$$(A-\lambda E) \cdot d_{n-1}(\lambda) \cdot C(\lambda) = \det(A-\lambda E) \cdot E = (-1)^n d_{n-1}(\lambda) e_n(\lambda) \cdot E,$$

а после сокращения на $d_{n-1}(\lambda)$ [10, с. 389] такое:

$$(A-\lambda E) \cdot C(\lambda) = (-1)^n e_n(\lambda) \cdot E,$$

ну а после простых преобразований и такое:

$$e_n(\lambda)E = (\lambda E - A) \cdot \left[(-1)^{n+1} C(\lambda)\right];$$

в словесной формулировке: остаток от деления слева матрицы $e_n(\lambda)E$ на матрицу $(\lambda E - A)$ равен нулю. Но мы знаем, что остаток от деления равен делимому $e_n(\lambda)E$ при $\lambda = A$, т.е. $e_n(A)E = O_{n\times n}$, а потому

$$e_n(A) = O_{n\times n}.$$

7.2.2 Инвариантный множитель $e_n(\lambda)$ есть минимальный полином

Теорема. Для всякой квадратной матрицы A инвариантный множитель $e_n(\lambda)$ ее характеристической матрицы $(A-\lambda E)$ является минимальным полиномом.

Доказательство. Мы знаем, что $e_n(\lambda)$ есть аннулирующий полином и, следовательно, делится на минимальный полином $\varphi(\lambda)$ без остатка:

$$e_n(\lambda) = \varphi(\lambda) \cdot q(\lambda), \qquad \text{старший коэффициент в } q(\lambda) \text{ равен } 1.$$

Далее можно утверждать, что

$$\varphi(\lambda)E = (\lambda E - A)Q(\lambda) + R = (\lambda E - A)Q(\lambda),$$

т.к. остаток от деления слева

$$R = \varphi(\lambda)E\Big|_{\lambda = A} = O_{n\times n}.$$

Рассмотрим систему двух понятных равенств (загляни в предыдущий пункт):

$$\left\{ \begin{array}{l} e_n(\lambda)E = (\lambda E - A)[(-1)^{n+1}C(\lambda)] \\ e_n(\lambda)E = \varphi(\lambda)q(\lambda)E = (\lambda E - A)Q(\lambda)q(\lambda) \ . \end{array} \right.$$

Исключая и сокращая, получим равенство

$$(-1)^{n+1}C(\lambda) = Q(\lambda)q(\lambda).$$

А т.к. ННОД $\{c_{ij}(\lambda)\} = 1$, полином $q(\lambda) \equiv 1$; и доказанное ранее равенство $e_n(\lambda) = \varphi(\lambda) \cdot q(\lambda)$ дает требуемое:

$$e_n(\lambda) = \varphi(\lambda).$$

7.2.3 Теорема Гамильтона–Кэли

(W. R. Hamilton, $*\,1805$, $\dagger\,1865$), (Arthur Cayley, $*\,1821$, $\dagger\,1895$)

Всякая квадратная матрица является корнем своего характеристического полинома.

Доказательство является простым следствием предыдущего:

$$\det(A-\lambda E) = (-1)^n \det(\lambda E - A) = (-1)^n d_n(\lambda) = (-1)^n d_{n-1}(\lambda) e_n(\lambda),$$

$$\det(A - \lambda E)\Big|_{\lambda = A} = (-1)^n d_{n-1}(A) e_n(A) = O_{n\times n}.$$

7.2.4 Заключительное замечание

Всю тему «Аннулирующие полиномы» можно, по сути, рассматривать как вариант полного доказательства теоремы Гамильтона–Кэли.

8 Группа подстановок

8.1 Подстановки и перестановки

8.1.1 Определения

Рассматриваем конечное упорядоченное множество

$$\mathbb{N}_n = (1\ 2\ 3\ \ \dots\ \ n)$$

и биекции (взаимно однозначные отображения)

$$\pi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n\,.$$

Эти биекции традиционно называются подстановками.

При заданном n подстановка вполне определяется таблицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

которая также называется подстановкой.

Результат подстановки — упорядоченное множество

$$\begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

называемое перестановкой множества $\mathbb{N}_n$.

Всего существуют $n!$ перестановок,
$n!$ подстановок,
$n!$ способов записи каждой подстановки,

т. к. наряду с записью

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

можно воспользоваться и записью

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & \ldots & i_n \\ \pi(i_1) & \pi(i_2) & \pi(i_3) & \pi(i_4) & \ldots & \pi(i_n) \end{pmatrix}.$$

По сути вещей, термины «перестановка» и «подстановка» суть синонимы.

8.1.2 Действия над подстановками

На множестве подстановок определена двуместная операция: умножение (произведение) подстановок — суперпозиция биекций $\pi_i : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$, определяемая формулой

$$\pi_3 = \pi_2 \cdot \pi_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}_n \quad \pi_3(k) = \pi_2(\pi_1(k)).$$

Пример. Пусть

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\pi_3 = \pi_2 \cdot \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

8.1.3 Группа подстановок

Свойства операции произведения подстановок повторяют свойства суперпозиции биекций:

- Ассоциативность.

- Существование нейтрального элемента — тождественная подстановка
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} .$$
Для любой подстановки π
$$E \cdot \pi = \pi \cdot E = \pi .$$

- Для каждой подстановки π существует обратная π^{-1}, такая, что
$$\pi^{-1} \cdot \pi = \pi \cdot \pi^{-1} = E .$$
Обратную к π подстановку можно записать, например, так:
$$\begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) & \dots & \pi(n) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} .$$

- В общем случае $\pi_1 \cdot \pi_2 \neq \pi_2 \cdot \pi_1$.

Контрпример. Пусть
$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \pi_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
тогда
$$\pi_2 \cdot \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \pi_1 \cdot \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вывод-определение. Из сказанного понятно, что множество подстановок $\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ вместе с операцией умножения подстановок образуют группу — так называемую СИММЕТРИЧЕСКУЮ ГРУППУ S_n. Группа S_n некоммутативна.

Это еще один специально отмеченный нами пример группы, т.е. некоторого множества M и операции на нем, удовлетворяющей трем аксиомам группы [19, с. 10].

8.1.4 Перестановки (и подстановки) с точки зрения теории матриц

Перестановку $(i_1 i_2 \dots i_n)$ можно рассматривать как элемент пространства $\mathbb{R}^n$, являющийся результатом умножения строки $(1\ 2\ \dots\ n)$ на перестановочную матрицу $E\begin{pmatrix} 1\ 2\ \dots n \\ i_1 i_2 \dots i_n \end{pmatrix}$, полученную из единичной перестановкой столбцов:

$$(1\,2\,3\ \dots\ n) \cdot (\vec{e}_{i_1} \vec{e}_{i_2} \dots \vec{e}_{i_n}) = (i_1\ i_2\ i_3\ \dots\ i_n).$$

Знак подстановки — это число

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & \dots & i_n \end{pmatrix} =_{\text{(по опр.)}} \det(\vec{e}_{i_1} \vec{e}_{i_2} \dots \vec{e}_{i_n}) = \{\pm\}1.$$

В зависимости от знака все подстановки подразделяются на:
- четные $\sigma = +1$;
- нечетные $\sigma = -1$.

Произведение двух четных подстановок — четно.

Произведение двух нечетных подстановок — четно.

Произведение четной и нечетной подстановок — нечетно.

Все четные подстановки образуют группу — подгруппу симметрической группы S_n.

8.2 Циклы (в теории подстановок)

8.2.1 Циклы

Рассмотрим любую подстановку степени n

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Возьмем любое число $k \in \mathbb{N}_n$ и рассмотрим последовательность натуральных чисел

$$\underbrace{k,\ \ \pi(k),\ \ \pi^2(k),\ \ ,\pi^3(k),\ \dots\ ,\pi^{n-1}(k),\ \ \pi^n(k)}_{(n+1)\text{ число из } \mathbb{N}_n};$$

в этой последовательности обязательно есть два одинаковых числа:

$$\pi^s(k) = \pi^{s+t}(k), \qquad t > 0.$$

Применив к левой и правой частям равенства π^{-s}, получим

$$k = \pi^t(k).$$

Среди всех t, удовлетворяющих последнему соотношению, выберем минимальное, которое вновь обозначим буквой t; теперь мы видим последовательность

$$\underbrace{k,\ \ \pi(k),\ \ \pi^2(k),\ \ \pi^3(k),\ \ldots\ ,\pi^{t-1}(k)}_{\text{все числа различные}},\ \ \pi^t(k) = k, \qquad t > 0.$$

Перед нами **цикл** — подстановка степени t:

$$\begin{pmatrix} k & \pi(k) & \pi^2(k) & \ldots & \pi^{t-2}(k) & \pi^{t-1}(k) \\ \pi(k) & \pi^2(k) & \pi^3(k) & \ldots & \pi^{t-1}(k) & k \end{pmatrix}.$$

Если $t < n$, то найдется число $s \neq \pi^{\alpha}(k)$, которое также включено в некоторый свой цикл

$$\begin{pmatrix} s & \pi(s) & \pi^2(s) & \ldots & \pi^{\tau-2}(s) & \pi^{\tau-1}(s) \\ \pi(s) & \pi^2(s) & \pi^3(s) & \ldots & \pi^{\tau-1}(s) & s \end{pmatrix}.$$

Найдется и последний цикл

$$\begin{pmatrix} z & \pi(z) & \pi^2(z) & \ldots & \pi^{T-2}(z) & \pi^{T-1}(z) \\ \pi(z) & \pi^2(z) & \pi^3(z) & \ldots & \pi^{T-1}(z) & z \end{pmatrix}.$$

Описанные циклы записываются обычно так:

$$\big(\, k\ \ \pi(k)\ \ \pi^2(k)\ \ \ldots\ \ \pi^{t-1}(k) \,\big)\,,$$

$$\big(\, s\ \ \pi(s)\ \ \pi^2(s)\ \ \ldots\ \ \pi^{\tau-1}(s) \,\big)\,,$$

$$\big(\, z\ \ \pi(z)\ \ \pi^2(z)\ \ \ldots\ \ \pi^{T-1}(z) \,\big)\,.$$

Исходная подстановка разложена в произведение циклов:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix} = {} & \big(\, k_1\ \ \pi(k_1)\ \ \ldots\ \ \pi^{t_1-1}(k_1) \,\big) \cdot \\ & \cdot \big(\, k_2\ \ \pi(k_2)\ \ \ldots\ \ \pi^{t_2-1}(k_2) \,\big) \cdot \\ & \ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ & \cdot \big(\, k_m\ \ \pi(k_m)\ \ \ldots\ \ \pi^{t_m-1}(k_m) \,\big)\,.\end{aligned}$$

Разложение в произведение циклов единственно с точностью до порядка следования сомножителей, которые коммутируют.

Пример. Разложить подстановку в произведение циклов:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \\ \\ 3\ 4\ 7\ 1\ 9\ 8\ 2\ 6\ 5 \end{pmatrix} = (6\ 8)\,(5\ 9)\,(1\ 3\ 7\ 2\ 4) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & & & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & & \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 5 & 6 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

8.2.2 Транспозиции

Транспозиция — это подстановка, действующая тождественно в точности на $(n-2)$ элементах из $\mathbb{N}_n$, т.е. это цикл длины 2.

Результат транспозиции — перестановка в точности двух элементов конечного упорядоченного множества $\mathbb{N}_n$.

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & & \downarrow & & & \downarrow & \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (3\ 6).$

Свойства транспозиций.

$$(i\ j) = (j\ i), \qquad (i\ j)(j\ i) = E, \qquad (i\ j)^{-1} = (i\ j).$$

Теорема. Каждый цикл длины t можно представить произведением $(t-1)$ транспозиции, а каждую подстановку, таким образом, можно (но не единственным способом) разложить в произведение транспозиций.

Предварительный пример.

$$(1\,2\,3\,4\,5) \;=\; (5\,1)(4\,1)(3\,1)(2\,1).$$

Действительно, выполняя последовательно подстановки, задаваемые циклами, получим следующую последовательность перестановок:

$$\begin{aligned} &1\,2\,3\,4\,5, \\ &2\,1\,3\,4\,5, \\ &2\,3\,1\,4\,5, \\ &2\,3\,4\,1\,5, \\ &2\,3\,4\,5\,1. \end{aligned}$$

Доказательство. Цикл $(i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_t) =$
$= \begin{pmatrix} \ldots i_1 \ldots i_2 \ldots i_3 \ldots i_{t-1} \ldots i_t \ldots \\ \ldots i_2 \ldots i_3 \ldots i_4 \ldots\ i_t\ \ldots i_1 \ldots \end{pmatrix} = (i_t i_1)(i_{t-1} i_1) \ldots (i_4 i_1)(i_3 i_1)(i_2 i_1).$
Это разложение можно назвать каноническим разложением цикла в произведение транспозиций.

Неединственность разложения очевидна:

$$(1\,2\,3\,4\,5) = (5\,1)(4\,1)(3\,1)(2\,1) = (4\,3)(4\,2)(5\,4)(5\,1).$$

Действительно, выполняя последовательно подстановки, задаваемые циклами, получим следующие последовательности перестановок:

$$\begin{array}{ll} 1\,2\,3\,4\,5\,, & 1\,2\,3\,4\,5\,, \\ 2\,1\,3\,4\,5\,, & 5\,1\,3\,4\,1\,, \\ 2\,3\,1\,4\,5\,, & 4\,2\,3\,5\,1\,, \\ 2\,3\,4\,1\,5\,, & 2\,4\,3\,5\,1\,, \\ 2\,3\,4\,5\,1\,; & 2\,3\,4\,5\,1\,. \end{array}$$

Вычисление четности подстановки.
Четность числа $(t-1)$ совпадает с четностью подстановки, задаваемой циклом длины t.

Если сложить длины всех циклов канонического разложения и отнять число циклов

$$(t_1 + t_2 + \ \ldots\ + t_k - k) = (t_1 - 1) + (t_2 - 1) + \ \ldots\ + (t_k - 1),$$

то четность полученного числа совпадает с четностью подстановки.

8.3 Выражение детерминанта матрицы через все элементы самой матрицы

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \ldots i_n)} \underbrace{\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}}_{=\{\pm\}1} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}\,.$$

Суммирование идет по всем перестановкам из n натуральных чисел, поэтому в сумме будет $n!$ слагаемых.

Доказательство индукцией по порядку n квадратной матрицы A.

База индукции. $n=1$. $\sum\limits_{(i_1)} \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ i_1 \end{pmatrix} a_{1i_1} =$

$= \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_{11} = a_{11} = \det \left[\ a_{11}\ \right].$

Расширение базы индукции. $n=2$. $\sum\limits_{(i_1 i_2)} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} a_{1i_1} a_{2i_2} =$

$= \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{22} + \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$

Расширение базы индукции. $n=3$.

$$\sum_{(i_1 i_2 i_3)} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} =$$

$$= \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$+\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{31} + \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{13}a_{21}a_{32} + \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Индукционный переход. $(n-1) \to n$.

$$\sum_{(i_1 i_2 \ldots i_3)} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \ldots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{(1 i_2 i_3 \ldots i_n); i_j \neq 1} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix} a_{11} a_{2i_2} a_{3i_3} \ldots a_{ni_n} +$$

$$+ \sum_{(2 i_2 i_3 \ldots i_n); i_j \neq 2} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix} a_{12} a_{2i_2} a_{3i_3} \ldots a_{ni_n} +$$

$$+ \sum_{(3 i_2 i_3 \ldots i_n); i_j \neq 3} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 3 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix} a_{13} a_{2i_2} a_{3i_3} \ldots a_{ni_n} + \ldots$$

. . . .

$$+ \sum_{(n i_2 i_3 \ldots i_n); i_j \neq n} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ n & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix} a_{1n} a_{2i_2} a_{3i_3} \ldots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{(ki_2i_3\ldots i_n);i_j\neq k} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ k & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix} a_{1k}a_{2i_2}a_{3i_3}\ldots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \sum_{(ki_2i_3\ldots i_n);i_j\neq k} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ k & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix} a_{2i_2}a_{3i_3}\ldots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \sum_{(i_2i_3\ldots i_n);i_j\neq k} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ k & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix} a_{2i_2}a_{3i_3}\ldots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \sum_{(i_2i_3\ldots i_n);i_j\neq k} (-1)^{k-1}\sigma \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ldots(k-1)\ k\ (k+1)\ldots n \\ i_2\ i_3\ i_4\ldots \quad i_k \quad k \quad i_{k+1} \ \ldots i_n \end{pmatrix} \prod_{s=2}^{n} a_{si_s} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{k-1} \sum_{(i_2i_3\ldots i_n);i_j\neq k} \sigma \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ldots(k-1)\ k\ (k+1)\ldots n \\ i_2\ i_3\ i_4\ldots \quad i_k \quad k \quad i_{k+1} \ \ldots i_n \end{pmatrix} \prod_{s=2}^{n} a_{si_s} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{k+1} \sum_{(i_2i_3\ldots i_n);i_j\neq k} \sigma \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ldots(k-1)\ k\ (k+1)\ldots n \\ i_2\ i_3\ i_4\ldots \quad i_k \quad k \quad i_{k+1} \ \ldots i_n \end{pmatrix} \prod_{s=2}^{n} a_{si_s} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{k+1} \sum_{(i_2i_3\ldots i_n);i_j\neq k} \sigma \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ldots(k-1)\ (k+1)\ldots n \\ i_2\ i_3\ i_4\ldots \quad i_k \quad i_{k+1} \ \ldots i_n \end{pmatrix} \prod_{s=2}^{n} a_{si_s} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \det A_{1k} = \det A.$$

8.4 Изоморфизм конечной группы и подгруппы симметрической группы S_n

Теорема. Любая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n.

Доказательство. Упорядочим как-нибудь элементы конечной группы G порядка n, начиная хотя бы с $e = a_1$:

$$G = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Возьмем произвольный элемент группы $\lambda \in G$ и умножим на него все элементы группы:

$$\lambda \cdot G = \lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}).$$

В последней последовательности нет одинаковых элементов, т.к., предполагая, что $a_{i_k} = a_{i_s}$, получим $\lambda a_k = \lambda a_s$, т.е. $a_k = a_s$, а следовательно, и $k = s$.

Последовательность $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ есть перестановка элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а последовательность натуральных чисел $(i_1 i_2 \ldots i_n)$

есть перестановка натуральных чисел $(1\,2\,\ldots\,n)$. Таким образом, возникло соответствие между элементами группы G и некоторыми подстановками из S_n :

$$\lambda \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Это соответствие инъективно (является инъекцией), т.к. если предположить противное, т.е. что для некоторых λ, μ

$$\lambda \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

$$\mu \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

то $\lambda a_1 = a_{i_1}$, $\mu a_1 = a_{i_1}$ и поэтому $\lambda = a_{i_1} a_1^{-1} = \mu$.

Посмотрим, какая подстановка соответствует произведению $(\lambda\mu)$ элементов группы:

$$\mu \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}, \qquad \mu \cdot a_k = a_{i_k},$$

$$\lambda \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda \cdot a_{i_k} = a_{\gamma_k},$$

$$(\lambda\mu) \cdot a_k = \lambda \cdot (\mu \cdot a_k) = \lambda \cdot a_{i_k} = a_{\gamma_k},$$

т.е.

$$(\lambda\mu) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Нейтральному элементу группы соответствует тождественная подстановка:

$$e \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Теперь понятно, что значит, что группа G изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n (устроена так же, как некоторая подгруппа группы S_n.)

Список литературы

1. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии / П. С. Александров. — М. : Наука, 1968. — 912 с.

2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. — 4-е изд.— М. : Наука, 1980. — 336 с.

3. Винберг, Э. Б. Курс алгебры / Э. Б. Винберг. — 3-е изд., исправл. и доп. — М. : Факториал Пресс, 2002. — 544 с.

4. Воеводин, В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. — М. : Наука, 1984. — 320 с.

5. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер.— 3-е изд. — М. : Наука, 1967. — 576 с.

6. Икрамов, Х. Д. Задачник по линейной алгебре / Х. Д. Икрамов ; под ред. В. В. Воеводина. — М. : Наука, 1975. — 320 с.

7. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 272 с.

8. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра : учебник для вузов / А. И. Кострикин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 368 с.

9. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные алгебраические структуры : учебник для вузов / А. И. Кострикин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 272 с.

10. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — 15-е изд. — М. : Лань, 2005. — 432 с.

11. Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1970. — 400 с.

12. Понтрягин, Л. С. Знакомство с высшей математикой: Алгебра / Л. С. Понтрягин. — М. : Наука, 1987. — 136 с.

13. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. — М. : ЛБЗ, 2001. — 384 с.

14. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина. — 3-е. изд., испр. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 464 с.

15. Тыртышников, Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 480 с.

16. Фаддеев, Д. К. Лекции по алгебре : учебное пособие для вузов / Д. К. Фаддеев. — 2-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2002. — 416 с.

17. Фаддеев, Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / И. С. Соминский, Д. К. Фаддеев. — 9-е изд. — М. : Наука, 1968. — 304 с.

18. Фаддеев, Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / И. С. Соминский, Д. К. Фаддеев.— 11-е изд., пер. и доп. — М. : Наука, 1977. — 288 с.

19. Цупак, А. А. Лекции по алгебре. I семестр / А. А. Цупак, А. Н. Цупак. — Пенза : Издательский центр ПензГУ, 2008. — 120 с.

20. Цупак, А. А. Псевдообратные матрицы / А. А. Цупак. — Пенза : Издательский центр ПензГУ, 2008. — 30 с.

21. Шафаревич, И. Р. Основные понятия алгебры / И. Р. Шафаревич. — Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. — 352 с.

Учебно-теоретическое издание

Цупак Алексей Александрович
Цупак Александр Николаевич

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ. II СЕМЕСТР. ПОЛИНОМЫ. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ. ЛИНЕЙНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ. λ- МАТРИЦЫ. ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК

Редактор Ю. С. Жидкова
Технический редактор А. Г. Темникова
Набор и верстка авторов

Подписано в печать 12.01.09. Формат $60 \times 84/16$
Усл. печ. л. 8,83
Заказ 292. Тираж 100.

Информационно-издательский центр ПГУ
Пенза, Красная, 40, т.: 56-47-33